B

Ad Bibliothecam
Canoniæ SS. Apoſt. Petri & Pauli
in Weyarn
comparavit
P. VALENTINUS HANSCH Conventualis ibid.

TITULUS SCRINII.	SERIES.	NUMERUS.

Math Un 78 12

Matheseos. Systemata & methodi

129.

R

Erläuterungen

der

Kästnerischen

Anfangsgründe

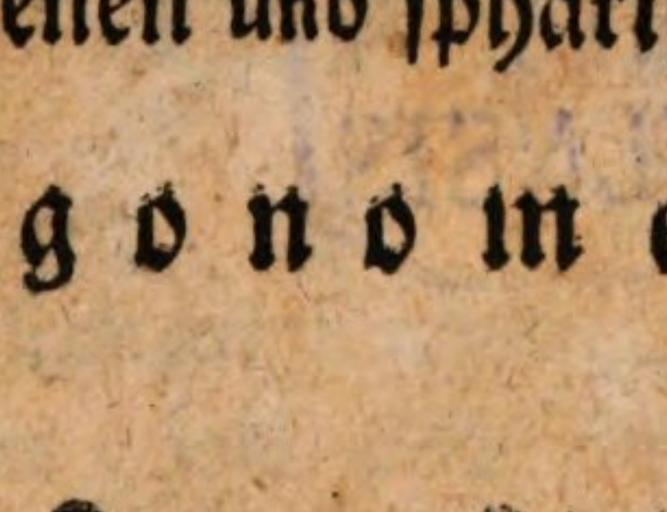
der

Arithmetik, Geometrie

ebenen und sphärischen

Trigonometrie.

Zweyter Theil.



Altenburg,
in der Richterischen Buchhandlung
1781.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Dem

Hochwohlgebornen Herrn

Herrn

Carl Wilhelm Benno von Heynitz

Herrn zu Groitsch. Sr. Churf. Durchl. zu Sachsen hochbestaltem Cammerherrn und Vice-Berghauptmanne, wie auch des Oberbergamts zu Freyberg und der Landes-Oekonomie-Manufaktur- und Commerzien-Deputation Assessorn.

Meinem gnädigen Herrn.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Hochwohlgeborner Herr,

Gnädiger Herr,

Ew. Hochwohlgebornen haben für mein Glück so ausnehmende Sorgfalt getragen und mich so vieler Gnadenbezeugungen zu würdigen geruht, daß ich immer eifrigst gewünscht habe Ihnen öffentlich meinen ehrerbietigsten Dank abzustatten.

Ich wage es daher Ew. Hochwohlgeborne Gnaden gegenwärtige Erläuterungen der Kästnerischen Geometrie unterthänig zu überreichen und schätze mich glücklich, wenn diese meine Arbeit Ew. Hochwohlgebornen Beyfall entspricht, und mir die angenehmste Hofnung gewährt mich hierdurch Hochderoselben Gnade einigermaßen würdig gemacht zu haben.

Daß

Daß die Vorsicht Eu. Hochwohlgebor-
nen nebst Dero Hohen Familie in beständi-
gen Wohlseyn erhalten wolle ist mein eif-
rigster Wunsch, der ich die Ehre habe mit
der vollkommensten Ehrfurcht zu verharren

Hochwohlgeborner Herr,

Gnädiger Herr,

Eu. Hochwohlgebornen Gnaden

Leipzig
im Wonnemonat 1781.

unterthäniger
Johann Friedrich Lempe.

Vorre-

Vorrede.

Die Mathematik hat in die Wissenschaften, das gemeine Leben und den Staat einen großen Einfluß.

Ihr Studium gewöhnt zur Aufmerksamkeit und zum Nachdenken und hellet den Verstand ungemein durch ihre ordentliche Methode auf; Deutliche und vollständige Begriffe und Erklärungen, richtige Grundsätze und evidente Beweise gewährt sie ihrem Freunde und sezt ihn in den Stand dieß auch in andern Wissenschaften — in so ferne es deren Natur erlaubt — aufzusuchen, und dadurch das Wahre vom Falschen, das Gewisse vom Wahrscheinlichen, zu unterscheiden.

Nur durch die Mathematik kann man die Kräfte der Natur gehörig schätzen auf die richtigste Art anwenden und sich zuverläßig zu Nutze machen; Der Mathematikverständige

Findt die Natur im Werk und scheint des Weltbau's Meister;
Er wiegt die inn're Kraft die sich in Körpern regt,
Den einen sinken macht und den im Kreis bewegt;
Er schlägt die Tafeln auf von ewigen Gesetzen
Die die Natur gemacht und nimmer wird verletzen.

Die Arithmetik und Geometrie aber sind die Grundlage zu allen übrigen Theilen der Mathematik, in denen man ohne genaue Kenntniß der arithmetischen und geometrischen Lehren nicht fortkommen und daher nie den Nutzen der Mathematik einerndten, kann.

Eines

Eines der vorzüglichsten Hülfsmittel zu ihrer Erlernung nun, ist, daß man sich eines guten Lehrbuches bedient. Unter die besten mathematischen Lehrbüchern aber gehört, wie bekannt, das von Herrn Hofrath Kästner, welches die Anfangsgründe der mathematischen Lehren auf das gründlichste und vollständigste in einer gedrungenen, diesem großen Manne eignen und einem Lehrbuche angemessenen Kürze enthält und vorzüglich geübte Leser voraussezt.

Ich habe mich daher bemüht Anfängern und Liebhabern der Mathematik, durch aufgesezte Erläuterungen der Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie ebenen und sphärischen Trigonometrie — welche nebst der Perspektiv den ersten Theil des Kästnerischen Lehrbuchs ausmachen — das Studium erst genannter Wissenschaften so viel als möglich zu erleichtern.

Die Schwierigkeiten die sich bey dergleichen Arbeit finden, zumal wenn man nicht Gelegenheit hat Unterricht darüber zu geben, wird mich bey Beurtheilung dieses Buchs entschuldigen, wenn hie und da Fehler eingeschlichen wären.

Die an einigen Orten eingeschaltenen bergmännischen Exempel, besonders in den Erläuterungen der Buchstabenrechnung, dürfen Anfänger, die solche nicht interessiren, überschlagen; aber Lehrlinge der Bergbaukunst werden vielleicht einige Befriedigung dabey finden.

Uebrigens hoffe durch diese Schrift zur weitern Ausbreitung nüzlicher Kenntnisse einen geringen Beytrag geleistet zu haben.

Johann Friedrich Lempe.

Zweyter

Zweyter Theil.

Erläuterungen

der

Kästnerischen Geometrie.

1. Erklärung.

Die Gränze einer Sache ist kein Theil von ihr; daher auch nicht von den Dingen, die in der Geometrie in Betrachtung kommen. —

Das griechische Wort: Geometrie, heißt eigentlich **Erd-** oder **Feldmeßkunst**, und kommt von γῆ und μέτρον (wovon ersteres nicht nur die ganze Erde, sondern oft auch eine Landschaft, und lezteres ein Maas, bedeutet,) her.

Sie mag auch wohl vor der Zeit ihrer Vervollkommenheit nichts anders als eine ungebildete Kunst, Felder und Wiesen auszumessen, gewesen seyn. Es ist sehr wahrscheinlich daß ihr Vaterland Egypten sey, wo des Nils jährliche Ueberschwemmung, die Einwohner zur Ausmessung und Bestimmung der Gränzen ihrer Felder nöthigte. Wer glauben wollte, daß sie izt auch nichts anders wäre, würde sich sehr irren. Ihr Umfang und Nutzen erstreckt sich unendlich weiter;

und von ihr gilt eigentlich das, was Jacob Bernoulli von der ganzen Mathematik sagt:

Omnes disciplinae Matheſi indigent; Matheſis nulla, ſed per ſe ſola ſibi ſufficit.

Die Griechen haben lange vor Chriſti Geburt der Geometrie einen ſo großen Umfang gegeben. Euklides hat bekanntermaßen zuerſt einen Lehrbegrif der Geometrie, den man unter dem Titel: Euclidis Elementa, kennet, verfaſſet, und der noch bis izt das Muſter aller Lehrbücher dieſer Wiſſenſchaft, iſt. Man hat davon verſchiedene, ältere und neuere, Ausgaben, von den man im 1. Stück des Herrn **Scheibels Einleitung zur mathematiſchen Bücherkenntniß**, davon bereits 11 Stück heraus ſind, hinlängliche Nachricht findet; Auch lernet man ſchon viele Ausgaben aus **Wolfs kurzen Unterricht der vornehmſten mathematiſchen Schriften** kennen. Hier wird es genug ſeyn, deshalb anzumerken, daß die beſte Ausgabe des griechiſchen Textes mit einer lateiniſchen Ueberſetzung davon, und den übrigen Schriften des **Euklides, David Gregorius**, Savilianiſcher Profeſſor der Aſtronomie zu Oxfort, unter dem Titel: Ευκλείδȣ τὰ σωζόμενα, h. e. Euclidis, quae ſuperſunt omnia, Oxoniae 1703. fol. beſorgt hat; Ferner, findet ſich bey des Chriſtophori Clavii Lib. XV Elementorum Euclidis; Franc. 1654, 8v. der vorzüglichſte Commentar, und unter den neuern Handausgaben hat man die beſte von dem ehemaligen wittenbergiſchen Profeſſor

Bär-

Bärmann unter dem Titel: Elementorum Euclidis Libri XV ad Graeci Contextus fidem recensiti et ad Vsum Tironum accommodati. Lipsiae 1743, 1769; 8v.

Die ganze Geometrie beruhet auf den Satz des Widerspruchs: daß Etwas zugleich so sey oder nicht so sey. Die Ordnung in der ihre Lehren vom Euklides und allen die ihm treulich folgen, vorgetragen worden, ist aus Vorerinn. 26 u. f. bekannt. —

Jeder Lehrsatz besteht aus zween Theilen, der Bedingung (hypothesi) und Behauptung (thesi) wovon jene beym Beweis mit zu Vördersätzen dient. Man muß also zur deutlichen Einsicht des Lehrsatzes, die Bedingung von der Behauptung wohl zu unterscheiden und jedes davon sich darzustellen wissen. Ich werde daher, Anfängern wegen, bey jedem Lehrsatze, wo es mir nöthig scheint, die Bedingungen sowohl als die Behauptung deutlich auseinander setzen. Auch bey jeder Aufgabe hat man auf zwey Stücke, auf das was 1) gegeben ist, und 2) gesucht werden soll, zu sehen. Ich werde daher ein ähnliches Verfahren, wie bey den Lehrsätzen beobachten.

Der Beweis wird aus schon erkannten Wahrheiten geführt, auf die man bey einem Lehrsatze durch die Bedingungen, bey einer Aufgabe durch das Gegebene und den Verfahren der Auflösung geleitet wird. Bey manchen Sätzen kann dadurch

der Beweis nicht unmittelbar gemacht, sondern muß erst durch die so genannte **Vorbereitung**, auf eine bekannte Form gebracht, werden. Ich werde sie, wo es nöthig, deutlich vor Augen zu legen suchen; auch die meisten Beweise gehörig auseinander setzen, und die Schlüsse durch Queerstriche unterscheiden.

2. Erklärung.

So sind alle Größen beschaffen, die man in der Geometrie betrachtet.

Die in der Welt würklich vorhandenen Körper sind zwar eigentlich nicht von der Art, wie dies bey einigen z. E. beym Schwamm, deutlich in die Augen fällt, sie können aber bey Anwendung der Geometrie auf sie, dafür angesehen werden, ohne deshalb in Gefahr zu seyn, merkliche Fehler zu begehen.

3. Erklärung.

Wenn man einen Körper z. E. einen **Würfel** in zerschmolzenes Wachs oder etwas dergleichen ganz eintaucht, so wird das Wachs beym Erkalten sich rund um an den Würfel anhängen. Gesezt nun, dieser könnte, nachdem das Wachs erkaltet, daraus gebracht werden, ohne daß die Rinde, die ihm umgiebt, zerbrochen würde; so wird innerhalb des Wachses eine Höhlung, dem Würfel an Gestalt und Größe gleich, bleiben. Diese Höhlung aber, ist der Raum, den der Würfel, **eine sterige Größe**, einnahm, und also dessen **geometrische Ausdehnung.**

Dies

Dies Beyspiel giebt auch Herr Hofrath Karsten im 1. §. der Geom. seiner Anfangsgründe der mathematischen Wissenschaften.

Die geometrische Ausdehnung heißt auch eine ausgedehnte Größe.

4. Erklärung.

Ausser dem in der Anmerkung zu dieser Erklärung von unserm Herrn Verfasser gegebene Beyspiel von der körperlichen Ausdehnung, dient auch das in der Erläuterung zur 3 Erklärung.

Aus beyden erläutert sich, daß ein geometrischer Körper und der Raum, den ein würklicher Körper einnimmt, einerley sey. In der Geometrie sieht man blos auf Gestalt und Größe, und betrachtet die übrigen Eigenschaften eines würklichen Körpers gar nicht. Es ist daher gleich viel, ob man sich diesen Raum mit irgend einen Körper ausgefüllt vorstellt, oder nicht. (Anmerkung zur 3. Erklärung.)

— Die Ausdehnung der ..... Linie (linea).]

Wenn man in Gedanken die Ausdehnung der Gränze eines Körpers von dem Körper selbst absondert, so erhält man dadurch den Begrif der Fläche, die also nur in die Länge und Breite, und nicht, wie der Körper, in Länge, Breite und Dicke, ausgedehnt seyn kann; denn nähme man auch bey den Flächen eine gewisse Dicke an, so

stellte man einen Körper und nicht seine Gränzen vor. So ist z. B. die Ausdehnung des Würfels an seinen Gränzen, dessen Fläche. Man kann sie auch mit andern seine Oberfläche nennen. Sie besteht aus sechs andern Flächen, aus sechs Seitenflächen.

Die Ausdehnung der Gränze einer Fläche heißt eine Linie, die also nur in die Länge ausgedehnt seyn und keine Breite haben kann, weil sie sonst selbst Fläche, und nicht die Gränze derselben seyn müßte. Z. B. die Ausdehnung einer der vorigen Seitenfläche an ihren Gränzen, sind Linien, wovon viere diese Seitenfläche einschliessen.

5. Erklärung.

— und also aller Ausdehnung.]

Nämlich: der Punkt ist die Gränze aller Ausdehnung.

— Man wird nun schon sehen, daß die Gränze einer Sache kein Theil von ihr ist; denn sonst müßten z. E. eine Menge über einander gelegte Flächen einen Körper ausmachen; welches doch nicht geschiehet.

7. Erklärung.

Eine ..... liegen.]

Ein zarter nicht sehr langer Faden, auf einem Tische zwischen zweenen Punkten ausgespannt, wird in einer geraden Linie liegen, und wenn er bey jeder Lage der Punkte zwischen den er ausge-

gespannt ist, alle Puncte des Tisches Oberfläche berührt; so wird sie eine Ebene seyn, wenigstens ohne merklichen Irrthum dafür angesehen werden können. Hierauf gründet sich die Ziehung gerader Linien auf einer Ebne, z. E. auf dem Pappier, mittelst des Lineals.

(Karst. Anfangsgr. ꝛc. Geom. 10. §.)

Eine krumme ..... kann.]

Z. E. die Oberfläche einer Kugel.

8. Erklärung.

In die Größe eines Winkels hat die Größe seiner Schenkel keinen Einfluß: der Winkel BAC (33 fig.) bleibt immer derselbe, seine Schenkel, mögen AB, AC; oder AE, AF, seyn; Aber dieser Winkel wird kleiner und = dem Winkel DAC, wenn AB auf AD, so wie hingegen der Winkel DAC größer und = BAC, wenn AD auf AB, zu liegen kommt.

11. Erklärung.

— so heißt ..... lothrecht.]

und man nennt AB ein Perpendikel, eine Normallinie, Perpendicularlinie.

und die ..... rechte (recti)]

Jeder Winkel der seinem Nebenwinkel gleich ist, heißt ein rechter, bey einigen ein gerader. Diese Definition kommt mit der im Buche überein, und wird ihr zur Erläuterung dienen.

Ein.....spitzig].

Stumpfe und spitzige Winkel nennt man auch in Rücksicht des rechten, schiefe Winkel. Also sind die Winkel EBD und EBC (fig. 10) schiefe.

12 und 13. Erklärung.

In der Geometrie nimmt man anfangs an, daß alle Puncte und Linien, auf die man Rücksicht zu nehmen hat, in einer und derselben Ebne liegen. In dieser Voraussetzung lassen sich alle die Lehren von den ausgedehnten Größen erweisen, die unser Herr Autor in der Geometrie bis zur 302 Seite abgehandelt hat. Sie machen den ersten Haupttheil der Geometrie, die ebne (Geometriam planam) aus. In ihr können also Ebne, die von allen Seiten begränzt sind, und die man ebne Figuren, auch wohl schlechthin, Figuren, nennt, in Betrachtung kommen, so wie in dem 2ten Haupttheile der Geometrie, in der körperlichen, von allen Seiten durch gewisse Gränzen eingeschlossene geometrische Körper, die man körperliche Figuren heißt. Zur ebenen Geometrie kann man auch die ebene Trigonometrie, und zur körperlichen die sphärische, rechnen, wie einige z. E. Herr Hausen, Karsten, thun.

Die Linien nun, die eine ebne Figur begränzen, heissen derselben Seitenlinien, welche zusammen den Umfang, Perimeter, der Figur ausmachen.

Weniger nicht als drey gerade Linien können, wie die Folge zeigt, den Umfang einer Figur ausmachen,

machen, aber wohl eine einzige krumme Linie kann es. Dies geschiehet unter andern beym Kreis, welcher die einzige krumme Linie ist, die in der **Elementar-** oder **Euklideischen Geometrie** bey Auflösung der Aufgaben gebraucht wird, und welche entsteht, wenn sich eine Linie CA, (11 fig.) auf einer Ebne um einen vesten Punct C, herumdrehet, bis sie wieder in ihre erste Lage kommt. Die krumme Linie ADBFGH nun, die der Punct A bey diesem Verfahren beschreibt, heißt der **Umkreis**, die **Peripherie** auch **Kreislinie**; Jedes Stück von ihr, wie BFG, ein **Kreisbogen**; der Raum über den CA weggestrichen ist, d. i. die Ebne die von der Kreislinie ADBFGH umschlossen wird, des Kreißes **Fläche**, oder kurz: **Kreisfläche**; der Punct C, um den sich CA drehete, und von jedem Punct der Peripherie wie F, G, ꝛc. gleich weit absteht, des Kreißes **Mittelpunct**. Jede gerade Linie, wie ACB, die man von einem Punct A des Umkreißes durch dem Mittelpunct C bis zum andern B der Peripherie zieht, nennt man des Kreißes **Durchmesser**; die Hälfte von ihm, CA = CB, den **Halbmesser**; Jede gerade Linie, wie FH, die man von einem Punct F in der Peripherie zum andern H, zieht, ist eine Linie die von dem Umkreis begränzt wird; sie heißt eine **Sehne**; und man sieht die beyden Stücken FGH, FDAH, der Kreislinie als der Sehne FH zugehörige **Bogen**, an. Das Stück der Kreisfläche, wie FGHF, oder FBDAHF, so zwischen der Sehne FH, und einem ihrer Bogen FGH, oder

FBDAH,

FBDAH, wird ein **Abschnitt** des Kreißes genannt; verwandelt sich aber die Sehne FH in den Durchmesser ACB, ein **halber Kreis**; so wie das Stück DCED der Kreisfläche, das zwischen zween Halbmessern DC, DE, und dem dazwischen fallenden Bogen DE, enthalten ist, ein **Ausschnitt**. Der **Winkel des Abschnitts** FGHF heißt derjenige, den die Sehne FH mit dem Bogen FG bey F macht; **der Winkel** FGH **im Abschnitte** FGHF, nennt man den, der seinen Scheitel G irgendwo in des Abschnitts FGHF Bogen FGH hat, und mit den Schenkeln GF, GH, durch der Sehne FH Endpuncte F und H streicht; und man sagt: **der Abschnitt** FGHF **enthalte diesen Winkel** FGH, **und stehe auf den andern der Sehne** FH **zugehörigen Bogen** FBDAH. **Aehnliche Abschnitte** heißen die, die gleiche Winkel enthalten.

Wenn eine Linie, wie TA, an den Kreis so antrift, daß sie ihn verlängert, nicht schneidet oder nichts von seinem Umfang wegnimmt, also kein Punct von ihr innerhalb der Kreisfläche fällt, sondern nur einem einzigen Puncte A mit dem Kreis gemein hat; so sagt man, sie **berühre**, den Kreis, und die Linie TA selbst nennt man eine **Tangente** oder **Berührungslinie**. Jede Linie hingegen, wie AB (28 fig.), die den Kreis schneidet, heißt eine **Sekante** oder **Schneidungslinie**.

Aus der Entstehung des Kreißes ergiebt sich der Grundsatz:

Alle

Alle Halbmesser eines und desselben Kreises, sind gleich groß; Bey dem Kreise AHGFBDA alle = CA. Da nun jeder Durchmesser doppelt so groß ist, als der ihm zugehörige Halbmesser; so sind auch alle Durchmesser eines und desselben Kreises gleich groß; z. E. in dem Kreise der 11 Figur alle = A⌣B.

14. Erklärung und Anmerkung.

Geradlinichte Figuren die 3 Seiten haben, heissen **Dreyecke**, die vier Seiten haben, **Vierecke**, die von fünf Seiten, **Fünfecke**, von sechs Seiten, **Sechsecke** u. s. w. Ueberhaupt nennt man die geradlinichten Figuren, die mehr als vier Seiten haben, **Vielecke**, **Polygone**.

Diese Benennung der Figuren im Deutschen nach der Zahl der Winkel, wie im Griechischen ist gebräuchlicher, als wenn man sie nach der Zahl der Seiten **dreyseitige**, (trilateres), **vierseitige**, (quadrilat.) ꝛc. und überhaupt **vielseitige**, (multilat.) wie im Lateinischen, nennen wollte.

In so ferne sie geradlinicht sind, sagt man schlechthin: Dreyecke, Vierecke, Vielecke; sonst aber druckt man durch die Beywörter, **krummlinicht**, **vermischtlinicht**, aus, daß ihr Umfang, im ersten Falle, aus einer oder mehrern krummen Linien, im zweyten, aus krummen und geraden Linien zugleich, bestehet.

15. Erklärung.

Rechtwinklicht ꝛc. ꝛc.]

Die

Die Folge zeigt, daß ein Dreyeck nur einen rechten oder stumpfen Winkel haben kann.

Die 15 Figur stellt ein rechtwinklichtes Dreyeck vor, wo CB, die Seite die dem rechten Winkel CAB gegenüber steht, die **Hypothenuse**, die beyden Seiten CA, AB, aber, welche den rechten Winkel einschlieſſen, die **Catheti**, oder **Perpendicularseiten**, genannt werden, und wovon man gemeiniglich eine, z. E. AB, ebenfalls als die **Grundlinie** des Dreyecks ABC, ansieht. Die 16. Figur stellt ein stumpfwinklichtes, so wie die 17. ein spitzwinklichtes Dreyeck, dar.

Spitz- und stumpfwinklichtes Dreyeck heissen auch **schiefwinklicht**.

16. Erklärung.

— — und ungleiche Seiten].

Von diesen sind die einander gegenüberstehenden Seiten gleich groß.

— — noch lauter rechte Winkel.]

Gar keinen rechten Winkel, sondern lauter schiefe.

Andere ꝛc. ꝛc.]

Einige theilen die ungleichseitigen Vierecke in **Trapezia** und **Trapezoides** ein, und verstehen unter einem Trapezium das ungleichseitige Viereck, bey dem nur zwo gegenüberstehende Seiten einander parallel sind, unter einem Trapezoid aber,

jedes

jedes andere ungleichseitige Viereck. Euklid und unser Herr Autor machen diese Eintheilung nicht.

17. Erklärung.

Quadrat, Rechteck, Raute, und länglichte Raute, sind Parallelogramme. Daß es aber nur diese 4 Figuren seyn, zeigt die Folge (12. Satz).

18. Erklärung.

Unter einer **ordentlichen** oder **regulären Figur** versteht man, die sowohl lauter gleiche Seiten als gleiche **Winkel** hat. Von dieser Art ist das gleichseitige Dreyeck, Quadrat, und jedes Vieleck (14. Erklärung und dessen Erl.) das lauter gleiche Seiten und gleiche Winkel hat, und eben deshalb **ein ordentliches oder reguläres Vieleck** oder **Polygon** heißt.

Der Winkel, den zwo nächst aneinander liegende Seiten einer solchen Figur einschliessen, heißt **ein Vielecks- oder Polygonwinkel** (angulus polygoni), so wie jede Seite, die **Polygon- oder Vielecksseite** (latus polygoni).

19. Erklärung.

Wenn in den zwo Figuren ABCDEA, abcdea, (fig. 93.) bey einer gleichen Anzahl von Seiten die Winkel EAB, ABC, u. s. w. den Winkeln eab, abc u. s. f. gleich sind, und in einerley Ordnung auf einander folgen, auch die Seiten, EA, AB, BC, ꝛc. ea, ab, bc, ꝛc. die diese gleiche Winkel einschliessen, ebenfalls in einerley Ordnung Proportionen ausmachen,

machen, daß z. E. EA : AB = ea : ab; BC : CD = bc : cd ꝛc.; so sagt man, daß die Figur ABCDEA der abcdea **ähnlich** sey, und nennt diese Seiten EA, ea; AB, ab u. s. w. **ähnlich liegende** oder **gleichnamige** Seiten, so wie die Winkel EAB, eab; ABC, abc u. s. w. **gleichnamige oder ähnlichliegende Winkel.**

20. Erklärung.

Mit allen diesen ꝛc.]

Solche Dinge, wie alle diese Erklärungen angeben, existiren eigentlich an und für sich selbst nicht, sondern coexistiren nur mit andern. Wenn man von einem Definito etwas behauptet, muß man entweder seine Realexistenz oder Möglichkeit darthun, welches die Alten schon erkannt haben. Euklid und alle die ihm getreu folgen, wie unser Herr Autor ꝛc. thun dies. Daher wird in der Folge allemal die Möglichkeit des Definiti, entweder durch Foderung, Grundsatz oder Aufgabe dargethan werden, woferne es nicht schon durch eine Sacherklärung, wie beym Kreis (13. Erkl.) geschehen ist. Man wird also sehen, daß alle die bisherigen Worterklärungen die Bedeutung solcher Wörter bestimmt haben, **die Zeichen von Begriffen, und nicht leere Töne sind.**

I. Forderung.

In der Geometrie sezt man allezeit die Möglichkeit, (weil sie offenbar ist) voraus: daß man (fig. 1) durch jede zweene Puncte A, B, in einer

Ebne

Ebne von unbestimmter Größe, eine gerade Linie*) AB ziehen, und solche nach Gefallen, nämlich so wohl von B nach F, als von A nach C zu, verlängern kann.

Sowohl durch die zween Puncte A, B; als C, A, oder B und F u. s. w. der geraden Linie CF ist ihre Lage gegeben, weil alle diese Puncte, nach einer und derselben Gegend zuliegen (6. Erkl.) Die Größe der Linie CF ist durch ihre Endpuncte C und F bestimmt, weil nur C und F die Gränzen der Linie CF sind (5 Erkl.)

1. Grundsatz.

Durch die zween Puncte A und B geht nur die gerade Linie CF und alle andere, z. E. AB, die man durch sie ziehen wollte, würden mit ihr zusammen fallen (Erkl. 6.)

Die geraden Linien AB, AC, stoßen, (fig. 6) in A zusammen, wo sie zwar einen Raum begränzen, aber nicht nach B und C zu, und man sieht, daß, diese beyden Linien für sich keinen Raum einschliessen, sondern daß wenigstens noch eine dritte die durch die Puncte B, und C, oder jede andere Punkte in ihnen geht, gezogen werden müßte.

2. Grundsatz.

Die in ihrer Lage verschiedene gerade Linien AC, CE, (39 fig.) stoßen in dem Punct C zusammen,

*) Da in der Elem. Geometr. keine andere krumme Linie als der Kreis vorkommt; so sagt man statt gerader Linie, oft schlechthin: Linie.

men, und haben ihn nur gemein; Verlängert man AC von C nach B, und CE, von C nach D, so schneiden AB und DE einander in C, so, daß sowohl von AB als DE etwas auf beyden entgegengesezten Seiten des Puncts C ist.

5. Grundsatz.

In der 10. Figur sind ABC und ABD rechte Winkel, und der Schenkel AB ist beyden gemein. Bringt man nun BD in die Lage BC, so fällt BD auf BC; aber AB liegt auf AB; also deckt der Winkel ABD den Winkel ABC, (3. Grundſ.)

7. Grundsatz.

Eben . . . . . wird.]

Wenn von dem Kreis um P ein Punct K in dem Kreis um A und einer F außerhalb leztern liegt; so muß der Kreis um P den um A, schneiden, wenn er zusammenhängend von einem Punct F nach einem andern Punct K, M ꝛc. kommen soll.

8. Grundsatzes Zusatz.

Nach einem . . . . . PQ sey.]

Nach einem willkührlichen Puncte O der gegebenen Linie AB ziehe man die Linie FO, und beschreibe mit einem Halbmesser FP der größer als FO, aus dem gegebenen Punct einen Kreis, dessen Durchmesser PQ (= 2 . FP) sey.

— — P über AB, Q darunter . . . .]
P unter AB und Q darüber . .

Eine

Eine gerade ..... zu schneiden.]

Eine gerade Linie wie AB (28 fig.) die durch einen innerhalb eines Kreißes AQP gegebenen Punct O geht, schneidet ihn wenigstens in zweenen Orten.

Ist nun dieser Punct O der Mittelpunct, so ist die durch ihn gehende Linie AB ein verlängerter Durchmesser; dieser aber, muß den Kreis in zween Puncten, schneiden, wie aus dem Begriffe eines Durchmessers (13. Erklär.) unmittelbar erhellet.

Ist aber O ein anderer im Kreise gelegener Punkt, so schneidet die durch ihn gehende Linie AB ebenfalls den Kreis wenigstens in zween Puncten: denn man ziehe durch ihn einen Durchmesser QP; der Halbkreis der sich auf jeder der beyden Seiten dieses Durchmessers befindet (6. Grundsf.), schließt mit ihm ꝛc. ꝛc. (S. Buch.)

1. Satz.

Ueber einer gegebenen geraden Linie (AB) ein gleichseitiges Dreyeck (ABC) zu beschreiben.

Gegeben.

Die bestimmte gerade Linie AB.

Gesucht.

Die Verzeichnung eines gleichseitigen Dreyecks ABC über AB.

Auflösung.

1) Beschreibe man aus A, als einem Mittelpunct, mit dem Halbmesser AB einen Kreis,

2) desgleichen auch aus B, mit dem Halbmesser BA (= AB) (2 Foder); Beyde werden einander in einem Punct C, schneiden.

3) Nach C ziehe man von A so wohl als von B die geraden Linien AC, BC; Das Δ*) ABC ist das verlangte.

Hiebey ist zu merken: daß in der Ausübung eben nicht nöthig sey, die beyden zur Verzeichnung dienenden Kreiße ganz zu zeichnen. Es erfoderte dies die Deutlichkeit des Beweisses. Ein paar kleine Bogen davon sind schon genug, um den Durchschnittspunct C zu finden. Dies kann man bey allen Aufgaben, wo ähnliche Verzeichnungen vorkommen, beobachten.

Beweis.

Wenn beyde Kreise einander in C schneiden so ist

AB = AC (13. Erkl.)
AB = BC (13. Erkl.)

Also: AB = AC = BC (I. Cap. Ar. 87. §.)

Daß dies aber von gedachten Kreisen geschiehet, erhellet so: Man ꝛc. (S. Buch).

Durch

*) Zeichen der Dreyecke.

Durch diese Aufgabe, die die allereinfachste der ganzen Geometrie ist, und deswegen den ersten Satz ausmacht, ist die Möglichkeit des gleichseitigen Dreyecks dargethan, welches, wie in die Augen fällt, durch eine Seite gegeben ist.

2. Satz.

Wenn in einem Dreyecke (ABC) (fig. 30) ein Winkel (A) einem Winkel (a) eines andern Dreyecks (abc) gleich ist, von den zwo Seiten, die die gleichen Winkel einschliessen, die eine (AB) des einen Dreyecks (ABC) der einen (ab) des andern Dreyecks (abc), und die andere (AC) des einen Dreyecks (ABC) der andern (ac) des andern Dreyecks (abc) gleich ist; so ist alles in beyden Dreyecken gleich.

Bedingung.

I) $A = a$
II) $AC = ac$
III) $AB = ab$

Behauptung.

I. $BC = bc$
II. $B = b$; $C = c$
III. $\Delta ABC = \Delta abc$

Vorbereitung.

Man lege in Gedanken das Dreyeck abc auf das Δ ABC so, daß

1) der Scheitel a auf A, und
2) die Seite ab längst AB, falle; So wird

Beweis.

Der Punct b auf B, (3 Grundſ. I. Bed.)
Die Seite ac längſt AC, (4 Grundſ. III. Bed.)
und der Punct c auf C, (3 Grundſ. II. Bed.)
fallen:

Alſo deckt:
die Seite bc die BC,
der W. b den B,
c den C,
das △ bac das BAC;

Folglich iſt dies alles in beyden Dreyecken gleich (3 Grundſatz.)

2. S. 1. Zuſatz.

Wenn zwo Seiten mit dem eingeſchloſſenen Winkel gegeben ſind, ſo läßt ſich dadurch nur ein Dreyeck beſtimmen, weil alle Dreyecke, die man aus dieſen Datis beſtimmte, ſolche, wie ſie der 2te Satz verlangte, ſeyn würden: Folglich alle einander gleich.

2. S. 2. Zuſatz.

Zu den Bedingungen des Satzes kommt hier noch, daß

1) AB = AC
2) ab = ac

ſeyn ſoll; und es wird gezeigt, daß nicht nur der
Winkel b = dem C
c = B

sondern auch

$$C = B$$

sey, wie man leicht aus dem, was im Buche davon gesagt ist, versteht.

2. S. 3. Zusatz.

In einem gleichschenklichten Dreyecke (ABC) sind die Winkel (B, C) an der Grundlinie (BC) einander gleich.

Denn stellet man sich Δ ABC unter dem Δ abc noch einmal vor, so hat man zwey Dreyecke, ABC, abc, bey den nicht nur $AB = ab$; $AC = ac$; und $a = A$; (die Bed. des 2 Satzes) sondern auch noch überdies $AB = AC$; $ab = ac$ (die Bed. des 2 Zus.); daher kann man Δ abc auf Δ ABC, einmal wie es die Vorbereitung zum Beweise des 2 Satzes erfodert, alsdann wie es der 2 Zusatz verlangt, legen, und man wird im ersten Falle

den Winkel $B = b$,
$C = c$ (2 Satz)

im 2ten aber

den Winkel $C = b$
$B = c$ (2 Zus.)

erhalten; Folglich, da

$B = b$; $C = c$
$b = C$; $c = B$

ist $B = C$; $C = B$
(Ar. I. Cap. 87. §.)

3. Satz.

Wenn in einem Dreyecke (ABC, 30 fig.) eine Seite (BC,) gleich ist einer Seite (bc) eines andern Dreyecks (abc); und die anliegenden Winkel (B, C,) in dem einen Dreyeck (ABC) den anliegenden Winkel (b, c) des andern Dreyecks (abc), der eine dem einen, der andere dem andern, gleich ist; so ist in beyden Dreyecken alles übrige gleich.

Bedingung.

I) BC = bc
II) C = c
III) B = b

Behauptung.

I) A = a
II) BA = ba
III) AC = ac
IV) Δ ABC = Δ abc

Vorbereitung.

Man lege in Gedanken Δ abc so auf Δ ABC, daß

1) der Punct b auf B, und
2) bc längst BC falle;

So fällt

Beweis

der Punct c auf C (3 Grundſ. III. Bed.)
die Seite ba längst BA (4 Grundſ. I. Bed.)
ca CA (4 Grundſ. II. Bed.)

Also liegt:

---

a zugleich in BA und
CA

folglich

folglich

a auf A

und es deckt

die Seite ba die Seite BA

ca CA

der Winkel a dem W. A

△ abc das △ ABC

Folglich ist dies alles in beyden △ gleich (3 Grds.)

Aus den allen erhellet aber auch, daß, wenn eine Seite mit den anliegenden Winkeln gegeben ist, sich dadurch nur ein Dreyeck bestimmen lasse; weil man aus diesen gegebenen Stücken, lauter Dreyecke bestimmen würde, wie dieser 3te Satz erfoderte: Folglich immer ein und dasselbe Dreyeck.

3. S 1. Zusatz.

Zu den Bedingungen des Satzes kommen hier noch die:

1) soll der Winkel B = C
2) b = c

seyn, und es wird gezeigt, daß in dieser Voraussetzung die

Seite BA = CA

ist.

Denn nun kann man die Dreyecke auch so auf einander legen, daß

der Punct c auf dem B
die Seite cb längst der BC

falle; und es wird

der Punct b auf dem C, (3 Grundſ.)
die Seite ca länger BA (3 Grundſ. I. Bed.)
ba CA (3 Grundſ. II. Bed.)

folglich:

a zugleich in BA; und
CA

Alſo:
auf A zu liegen kommen;
Daher deckt
die Seite ca die Seite BA (3. Grundſ.)
ba CA (Grundſ.)

Folglich iſt:
ca = BA
ba = CA;

Da nun
BA = ba; CA = ca (verm. des 3. S.)
ba = CA; ca = BA

ſo iſt BA = CA; CA = BA
(Arith. 1. Cap. 82. §.)

3. S. 2. Zuſ.

Nimmt man BC für die Grundlinie des △ ABC an, ſo iſt in demſelben, wenn die Winkel B, C an der Grundlinie gleich ſind, die Seite BA = der CA (1. Zuſ). Alſo iſt das △ ABC gleichſchenklicht. Folglich iſt jedes △ wo die Winkel an der Grundlinie gleich ſind, gleichſchenklicht.

3. S. 3. Zus.

In einem gleichseitigen ..... gleich,]

Wenn im Δ ABC (30 fig.) die Seite AB = der Seite AC; so ist der Winkel B = dem Winkel C. (2 S. 3 Zus.) Ist nun überdies noch AB = BC; so ist auch C = A (2 S. 3 Zus.). Folglich im gleichseitigen Dreyecke ABC, der Winkel A = B = C.

und wenn ..... gleichseitig.]

Wenn in dem Dreyecke ABC der Winkel B=C; so ist AB = AC (3 S. 2 Zus.); Ist nun überdieß noch B = A; so ist auch AC = BC (3 S. 2 Zus.); folglich in dem Δ ABC in dem alle Winkel gleich angenommen worden, ist AB = BC = AC; oder das Δ ist gleichseitig.

3. S. 4. Zus.

Denn es hat gleiche Seiten und Winkel, wie der Begrif einer regulären Figur erfodert. (18. Erklär. und dessen Erl.)

Hierdurch ist auch die Möglichkeit einer regulären Figur bey den Dreyecken dargethan.

4. Satz.

Wenn (fig. 30) **in zweyen Dreyecken** (ABC, abc) **alle Seiten** (AB, BC, AC; ab, bc, ac) **gleich sind, die eine Seite** (AB) **des einen** Δ (ABC) **der einen Seite** (ab) **des andern** Δ (abc), **die andere Seite** (BC) **des einen** Δ **der andern Seite** (bc) **des andern** Δ, **die dritte Seite** (AC) **des**

des einen Δ der dritten (ac) des andern; so ist alles in beyden Dreyecken gleich.

Bedingung.

I) AB = ab
II) BC = bc
III) AC = ac

Behauptung.

I) Der Winkel A = dem a
II) B = b
III) C = c
IV) Δ ABC = Δ abc

Vorbereitung.

Man lege in Gedanken bc dergestalt auf BC, daß die Puncte a und A auf verschiedene Seiten dieser Linie BC (wie fig. 31, 32, 32) fallen; so kann der Punct a dreyerley Lage erhalten.

Die **erste** (*) fig. I) ist, wenn a in die verlängerte Linie AC fällt. (Dies geschieht beym rechtwinklichten Dreyecke).

Die **zwote**, (fig. 32) wenn a so zu liegen kommt, daß eine gerade Linie von a nach A gezogen, diese aA innerhalb des Winkels ABC falle; (dies erfolgt bey spitzwinklichten Dreyecken).

Und die **dritte**, (fig. 32 *) wenn a so fällt, daß aA ausser BAC zu liegen kommt. (Dies trägt sich bey stumpfwinklichten Dreyecken zu.)

Be-

(*) Die mit römischen Ziffern bemerkten Figuren, deuten die zu den Erläut. gezeichneten, an.

Beweis
Für die Erste Lage.

Weil (fig. I)

AB = ab (I. Bed.)

so ist

der Winkel A = a (2 S. 3 Zus.)

Da aber auch

AC = ac (III. Bed.)

so sind die beyden Dreyecke ABC, und abc solche, wie sie der 2. Satz verlangt; Folglich ist alles in ihnen gleich.

Für die Zwote Lage.

Da B und C auf verschiedenen Seiten von Aa liegen, so ist

der Winkel BAC = BAa + aAC

bac = baA + AaC

Da nun die Seite

AB = ab (I. Bed.)

so ist der Winkel

BAa = baA (2 S. 3 Zus.)

und weil die Seite

AC = ac (III. Bed.)

so ist auch der

Winkel aAC = AaC (2 S. 3 Zus.)

Folglich

BAa + aAC = baA + Aac; (Ar. I. Cap. 88 §.)

Also:

BAC = bac

Und

Und die beyden Dreyecke ABC, abc, (fig. 32) wieder solche wie der 2. Satz erfodert; Mithin ist in ihnen alles gleich.

Für die Dritte Lage.

Weil B und C auf einer Seite von Aa liegen; so ist

der Winkel BAC = BAa — CAa

bac = baA — caA

da nun die

AB = ab (I. Bed.)

so ist der

Winkel BAa = baA (2 S. 3 Zus.)

und weil

AC = ac (III. Bed.)

so ist auch der

Winkel CAa = caA (2 S. 3 Zus.)

Also:

BAa — CAa = baA — caA

(Arith. I. Cap. 88. §.);

Folglich der

Winkel BAC = bac

Und die beyden Dreyecke ABC; abc; (32 * fig.) sind, wie sie nach dem 2. Satze seyn sollen: Mithin ist alles in ihnen gleich.

4. S. 1. Zus.

Aus drey Seiten ein Dreyeck zu verzeichnen ist ein ähnliches Verfahren wie im 1. Satze. Hievon aber wird weiter unten (9. S. 8. Zus.) mehreres

reres zu sagen seyn. Indessen sieht man hier schon so viel ein, daß drey Seiten (AB, BC, AC) nur ein Dreyeck (ABC) ob gleich in verschiedenen Stellungen, geben können. Aus eben den drey Seiten AB, BC, AC erhält man lauter solche Dreyecke ABC (fig. II, III) wie sie der 4. Satz verlangt; es mag z. E. A über oder unter BC (fig. II); B über oder unter AC (fig. III) ꝛc. liegen. —

Aus dem 2, 3, 4. Satze sieht man, daß zur Bestimmung eines Dreyecks entweder

1) eine Seite mit dem eingeschlossenen Winkel, oder

2) eine Seite mit den anliegenden Winkeln, oder

3) alle drey Seiten

bekannt seyn müssen. Für 1) und 2) wird im 9. Satz 14. Zus. und dessen Erl. noch eine Ergänzung kommen. Die Bestimmung aber kann entweder durch Verzeichnung — deren Verfahren jeder, der gnügliche Theorie weiß, ohne Schwierigkeit selbst findet — oder durch Rechnung (lehrt die Trigonometrie) geschehen. Hier braucht man nur zu wissen, wie viele und welche Stücke, dazu nöthig sind.

4. Satz. 2. Zusatz.

In einem Δ stehen gleiche Seiten gleichen Winkeln gegenüber, und umgekehrt: gleiche Winkel, gleichen Seiten.

Dies

Dies folgt aus des 2. Satzes 2. Zusatz; 3ten Satzes 1. Zusatz.

5. Satz.

Gegeben.

Ein Winkel EAF.

Gesucht.

Winkel BAD = Winkel DAC

Auflösung.

1) Auf des gegebenen Winkels EA F (3 3 fig.) Schenkeln EA, AF, nehme man nach Gefallen 2 gleiche Stücke, AB = AC;

2) Ziehe durch dieser Stücke Endpuncte B, C die gerade Linie BC;

3) Beschreibe über BC ein gleichseitiges Dreyeck BDC;

4) Ziehe durch dieses Δ Scheitel D und des gegebenen Winkels seinen A die gerade Linie AD;

Diese wird EAF halbiren, oder den Winkel BAD = DAC = ½ EAF machen.

Beweis.

AB = AC (1) Aufl.)
BD = CD (3) Aufl.)
AD = AD, (oder beyden ΔΔ gemeinschaftl.)

Also:

Δ ABD = Δ DCA (4. S.)

Folg-

Folglich:

Winkel BAD = DAC (4. S.)
$= \frac{1}{2}$ EAF,

Weil BAD, DAC des Winkels EAF beyde Theile, und gleich, sind.

5. S. Zus.

Halbirt man den Winkel BAD so wohl als den DAC; so wird bey dieser 2ten Halbirung der Winkel EAF in $4 = 2 \times 2 = 2^2$ Theile getheilt. Geschieht die Halbirung mit jedem Viertel, so wird er bey dieser 3ten Halbirung in $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$ und so bey der 4ten in $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$, überhaupt also bey der nten Halbirung in 2^n Theile getheilt.

6. Satz.

Gegeben

Eine gerade Linie AB

Gesucht

AE = EB (34 fig.)

Auflösung.

1) Ueber AB beschreibe man ein gleichseitiges Dreyeck (1 S.)

2) Halbire dessen Winkel ACB der der gegebenen AB entgegensteht. (5 S.)

Die Linie CD die solches thut, halbiret AB in E, oder macht AE = EB.

Beweis.

Die Linie CD die den Winkel ACB halbiret, gehet zwischen seinen Schenkeln AC, CB, und muß also irgendwo zwischen A und B die AB schneiden, und also dadurch in 2 Theile theilen. (2. Grundſ.) Es geschehe der Durchschnitt in E; so ist in den Dreyecken ACE und ECB, die Seite

$$AC = CB \text{ (1. Aufl.)}$$
$$CE = CE \text{ (1. Aufl.)}$$

der W. $ACE = ECB$ (2. Aufl.)

Also:

$$\Delta ACE = \Delta ECB \text{ (2. S.)}$$

Folglich

$$AE = EB \text{ (2. S.)}$$
$$= \tfrac{1}{2} AB.$$

Anmerkung.

Das Verfahren kürzt sich ab und wird zur Ausübung bequem, wenn man mit AB aus A und B über und unter AB, Bogen zieht, die einander bey C und D schneiden.

6. S. 1 Zuſ.

Halbirt man nun AE und EB; so theilt auch diese 2te Halbirung AB in $4 = 2 \cdot 2 = 2^2$ gleiche Theile; So wird AB durch 3, Halbirung in $8 = 2^3$; durch 4 in $16 = 2^4$, überhaupt durch die ten in 2^n gleiche Theile getheilt.

7. Satz

7. Satz.

I.

Gegeben

1) Eine unbegränzte gerade Linie AB;
2) Ein Punkt C in ihr.

Gesucht

Die Aufrichtung eines Perpendikels durch C.

Auflösung.

1) Aus C (fig. IV.) beschreibe man einen Kreis, der AB in M und N schneidet; (8. Grundsf. Zus.)

2) Verzeichne über MN ein gleichseitiges Dreyeck MDN; (1. Betr.

3) Durch D, den Scheitelpunct des Δ der MN gegen über steht, und C, ziehe man DC; (1. Fod.)
So ist DC des verlangte Perpendikel.

II.

Gegeben

1) Einer unbegr. ger. Linie AB (fig. V.)
2) Ein Punct C ausserhalb derselben.

Gesucht

Die Fällung eines Perpendikels von C auf AB.

Auflösung.

Die Auflösung ist wie für I. Folgendes ist das abgekürzte Verfahren und zur Ausübung bequem.

Für I. Aus C (fig. IV.) schneide man auf AB mit dem Zirkel nach Gefallen CM = CN ab; beschreibe aus M und N mit dem Halbmesser MN Bogen, die sich bey D schneiden, und ziehe CD; so ist sie ebenfalls das verlangte Perpendikel.

Für II. Zieht man aus C mit einem willkührlichen Halbmesser MN; und macht alles übrige wie vorhin.

Bey ähnlichen Verzeichnungen verhält man sich in der Abkürzung auf ähnliche Art.

Viele Arten der Verzeichnung solcher und anderer geometrischer Größen, lernt man aus Müllers Geometrie für Kinder, Malers Geometrie, Schotti cursu mathem. Lib. I. Cap. IV. Sargeneks Geometrie in Tabellen, Hedrichs mathematische Nebenübungen, und dergleichen Bücher mehr, welche alle anzuführen überflüßig ist, zumahl da man sich selbst dergleichen ohne Schwierigkeit erfinden kann, wenn man genug Theorie weiß. Indessen dient Anfängern die Lesung solcher Schriften z. E. Müllers Geometrie für Kinder, sich zu prüfen, wie viel geometrische Theorie sie wissen. — Solche Prüfung möchte wohl selbst manchen Logiker und Metaphisiker höchst nützlich und ersprießlich seyn. —

Erl. des Beweises.

Für I.

Nun haben . . . . . = R (11. Erkl.)]
In den Dreyecken CMD, und CND (fig. IV.) ist
CM =

CM = CN (1) Aufl. 13. Erkl.)
MD = ND (2) Aufl.)
CD = CD

Also:

Δ CMD = Δ CND (4. S.)

Folglich

W. MCD = DCN

Mithin steht DC so auf AB, daß die Nebenwinkel gleich sind, also jeder = R; (11. Erkl. und dessen Erl.) Folglich steht DC senkrecht auf AB d. i. DC ist ein Perpendikel.

Für II.

— so haben . . . . . = R (11. Erkl.)]

In den Dreyecken (fig. V) DCM, DCN ist

DC = DC (beyden gemein)
DM = DN (2) Aufl.)
CM = CN (1) Aufl. 13. Erkl.)

Also:

Δ DCM = Δ DCN

Folglich

der W. MDC = NDC (4. S. 2. 3.)

Aber in den Dreyecken MDE, NDE, ist

DE = EC (beyden gemein)
DM = DN (2) Aufl.)
W. MDE = NDE

Mithin:

Δ MDE = Δ NDE (2. S.)

Folglich:

Winkel DEM = DEN (2. S.)

Also

= R (11. Erkl.)

Folglich

DE ein Perpendikel (11. Erkl.)

8. Satz.

Bedingung

EBC, EBD, sind zween Nebenwinkel auf der geraden Linie CD.

Behauptung

EBC + EBD = 2 R

Beweis.

— — so ist . . . . . = 2 R.]

W. EBC = R + ABE

EBD = R — ABE

Also

EBC + EBD = 2 R;

Ist einer der beyden Winkel EBD, EBC, spitzig, wie EBD, so fehlt ihm an dem R so viel, als sein Nebenwinkel EBC den R übertrift; weil EBD = R — ABE, aber EBC = R + ABE: Daher der Winkel EBD um den Winkel ABE kleiner, der EBC hingegen um den ABE, größer als ein R ist. Dieser Winkel ABE heißt des Winkels EBD **Ergänzung** oder **Complement zum rechten Winkel**, so wie EBC des Winkels EBD **Complement** oder **Ergänzung zu 2 R.**

Man

Man stelle sich vor, daß sich EB um B nach D zu, bewegte, so wird der Winkel EBD immer abnehmen und der EBC hingegen immer wachsen; fällt nun BE auf BD; so ist der Winkel EBC um den EBD angewachsen, also aus EBC nun EBC + EBD = 2 R = CBD worden. Ein Winkel also dessen Schenkel in gerader Linie liegen = 2 R.

Es könnte scheinen, als wenn ein solcher Winkel keiner heißen könnte: Allein, wenn man den Begriff vom Winkel (8. Erkl.) genau in Erwägung ziehet, so wird man finden, daß er so allgemein ist, daß ein solcher Winkel als ein besonderer Fall darinne enthalten ist.

Drehet sich BE weiter, herunter nach F zu, so wird, wenn BE in BF fällt, aus dem Winkel CBD der erhabene CBF werden, also EBD um den DBF anwachsen: Folglich ist der erhabene Winkel > 2 R.

8. S. 1. Zus.

Dieser Zusatz ist der umgekehrte 8. Satz. Was also in jenem behauptet wurde, wird in diesem zur Bedingung; und umgekehrt, was in jenem Bedingung war, wird in diesem behauptet. Die Bedingungen dieses Zusatzes sind:

1) Der Winkel EBC liege an einem andern EBF, so, daß dieses EBF eine Schenkel BF auf die entgegengesezte Seite des Winkels EBC einen Schenkel BC, zu liegen komme,

die beyden andern Schenkel BE dieser Winkel zusammen fallen, daß also beyden der BE gemein ist.

2) Die Summe gleich erwähnter Winkel, oder EBC + EBF sey = 2 R.

Es wird behauptet:

Daß diese Winkel EBC und EBF Nebenwinkel sind; oder, welches eben das ist, (10. Erkl.) daß die beyden einander entgegengesezten Schenkel CB, BF in einer geraden Linie liegen, und also BF die Verlängerung von CB sey.

Beweis.

Man setze BF sey es nicht, so muß eine andere Verlängerung von CB statt finden. Es sey diese BD; so ist

CBE + EBD = 2 R (8. S.)

Aber auch

CBE + EBF = 2 R (2. Bed.)

Folglich

EBC + EBD = EBC + EBF (Arithm. I. C. 88. §.)

EBC = EBC abgezogen

EBD = EBF

Also muß der Winkel EBD den ihm gleichen EBF decken. Dies geschiehet aber, wenn beyder Winkel Schenkel auf einander fallen, (3. Grundsz.)

also BE auf BE, und BF auf BD: Folglich muß BF die Verlängerung von CB seyn.

8. Satz. 2. Zusatz.

Und ..... vier rechte.]

In der 37 fig. ist

$$\left.\begin{array}{l} CBA + ABE + EBD = 2\,R \\ DBF + FBC = 2\,R \end{array}\right\} (8.\,S.)$$

Also $CBA + ABE + EBD + DBF + FBC = 2R + 2R = 4R.$

8. S. 3. Zusatz.

Da zween Nebenwinkel allezeit = 2 R sind; so muß, wenn der eine kleiner als 2 R, d. h. spitzig ist, der andere größer als 2 R, d. i. stumpf, seyn. (8. S.)

8. S. 4. Zusatz.

Wenn eine gerade Linie AB eine andere ED (39 fig.) in C schneidet; so sind die an C entgegengesezte Winkel ACE, DCB, (oder ACD, ECB;) welche **Scheitelwinkel** (anguli ad verticem oppositi) heissen, einander gleich. Denn

$$ACE + ECB = 2\,R\ (8.\,S.)$$
$$ECB + BCD = 2\,R\ (8.\,S.)$$

Also $ACE + ECB = ECB + BCD$ (Arithm. I. Cap. 87. §.)

$ECB = ECB$ abgezogen

Folglich

$ACE = BCD$ (Ar. I. Cap. 88. §.)

Eben so läßt sich beweisen, daß ACD = ECB sey.

Wenn (Fig. 39) vier gerade Linien CA, CE, CB, CD, um einen Punct E gleiche entgegengesezte Winkel, Scheitelwinkel, oder ACE = DCB; ACD = ECB machen; so werden jede zwo entgegenstehende Linien, AC, CB; CE, CD, in gerader Linie liegen.

Dies ist des 4. Zusatzes umgekehrter Satz. Sein Beweis ist so:

$$ACE + ACD + ECB + DCB = 4R \text{ (2 Zus.)}$$

Da nun

$$ACE = DCB \text{ (Vorausf.)}$$
$$ACD = ECB \text{ (Vorausf.)}$$

so ist

$$2\,ACD + 2\,ACE = 4R = 2\,ACE + 2\,ECB$$

Also

$$ACD + ACE = 2\,R = ACE + ECB$$

Folglich liegen DC und CE sowohl als AC und CB in einer geraden Linie (1. Zus.)

9. Satz.

Bedingung

1) CD sey die Verlängerung von BC;

2) ACD ein äusserer Winkel, von der Seite AC des △ ABC und der Verlängerung CD gemacht;

3) BAC ein innerer, der verlängerten Seite BC gegenüberstehender Winkel.

Behauptung

der äussere Winkel ACD > BAC.

Vorbereitung.

1) Man halbire AC; dies geschehe in E; (6 S.)

2) Ziehe BE und verlängere sie nach Gefallen nach F zu; (1. Fod.)

3) Mache EF = EB (2. Fod.)

4) Ziehe FC (1. Fod.)

Beweis.

Weil F über BD und von AC nach der Seite D zu liegt; so fällt FC zwischen des Winkels ACD Schenkel AC, CD, und der

W. ACF < ACD (Vorr. 8. und Erl.)

Nun sind in den

Dreyecken AEB, FEC der

Winkel AEB = FEC (8. S. 4. Z.)

BE = EF (3. Vorb.)

AE = EC (1. Vorb.)

Also:

Δ AEB = Δ FEC (2. S.)

Folglich

W. BAC = ACF (2. S.)

Mithin (da

W. ACD < ACF,)

ist auch

W. BAC < ACD

9. S. 1. Zus.

AC in . . . . . ABC.]

Haben Anfänger den vorigen Beweis für BAC < ACD recht gefaßt, so werden sie sich leicht auch beweisen können, daß BCG > ABC, desgleichen, daß wenn man BA über A hinaus verlängert, der so entstehende äussere Winkel > ACB, sey, welches ich daher Anfängern zur Uebung überlasse.

9. S. 2. Zus.

W. BAC < W. ACD
ACB = ACB add.

BAC + ACB < AGD + ACB (Ar. I. Cap. 88. §.)

ACD + ACB = 2 R

Also BAC + ACB < 2 R;
W. ABC < BCG (1. Zus.)
ACB = ACB

ABC + ACB < BCG + ACB
BCG + ACB = 2 R

Also ABC + ACB < 2 R

Eben so erhellet, daß
W. BAC + W. BCA < 2 R.

Sieht man AC; oder BC; oder AB als eine Grundlinie an; so hat man den Satz:

Die Summe der beyden Winkel an der Grundlinie eines Dreyecks sind allezeit kleiner als 2 R

9. S.

9. S. 3. Zuf.

In einem Dreyecke ABC (fig. 15) das einen rechten Winkel A hat, sind die beyden andern C, B spitzig: denn wäre einer davon z. E. B ein rechter oder stumpfer; so würde (AB als die Grundlinie angesehen,) A + B im ersten Falle = 2 R im 2ten > 2 R seyn. Dieß ist aber nicht, weil diese Summe < 2 R seyn muß (2 Zuf. und dessen Erl.) Auch in einem Dreyecke, ABC (16 fig.) das einen stumpfen Winkel C hat, sind die beyden andern A, B, spitzig. Denn wäre z. E. B = R oder > R: so würde, CB als die Grundlinie angesehen, C + B > 2 R seyn. Wieder den 2 Zusatz.

Hieraus erhellet: daß ein rechtwinklichtes Dreyeck nur einen rechten Winkel, und ein stumpfwinklichtes nur einen stumpfen Winkel, haben kann: dahingegen in einem spitzwinklichten, alle drey Winkel spitzig sind: Weil da die Summe der beyden Winkel an jeder Seite als Grundlinie betrachtet < 2 R. Man sieht nun, daß nur die in der 15. Erklärung gemachten Eintheilung der Dreyecke in Absicht der Winkel, und keine andere, statt habe.

9. S. 4. Zusatz.

Auf eine gegebene Linie AB, (fig. 35) giebt es von einem Punct D außer ihr nur ein einziges Perpendikel DC; denn gäbe von D auf AB noch ein Perpendikel, daß DA seyn mag: so machte dieß bey A mit AB rechte Winkel, und es würde

daher

daher in dem △ CDA zween rechte Winkel geben, welches nicht möglich ist. (3. Zus.)

Auch durch einen Punct B in CD geht (fig. 37) nur ein einziges Perpendikel BA.

Denn es sey BE noch eine durch B gehende Normallinie; so ist

W. EBD = R

Nun ist auch ABD = R, (weil AB ein Perpendikel seyn soll); Also

W. EBD = W. ABD

Folglich müssen beyde Winkel einander decken. (4. Grundſ.) Mithin BE auf BA fallen. (3. Grundſ.) Also kann man aus B in CD kein anderes Perpendikel BE, das von dem BA verschieden wäre, aufrichten.

9. Satz. 5. Zusatz.

I) Bedingung.

1) △ MCN (36 fig.) sey gleichschenklicht.
2) C dieses △ MCN Spitze.
3) E mitten in der Grundlinie MN.
4) CE die durch die Spitze C und das Mittel E der MN gezogene Linie.

II) Bedingung.

1) I Bedingung, 1), 2).
2) CE ein Perpend. von C auf MN

III) Bedingung.

1) I Bedingung, 1), 2), 3).
2) EC ein Perpend. aus E.

IV)

IV) Bedingung.

1) I Bedingung, 1), 2), 3).
2) CE eine Linie die den Winkel MCN halbirt.

I Behauptung.

CE halbiret den der Grundlinie MN gegenüber stehende Winkel MCN und steht auf MN senkrecht.

II Behauptung.

Das Perpendikel CE halbirt MN und den Winkel MCN.

III Behauptung.

EC geht durch C und halbiret den Winkel MCN.

IV Behauptung.

CE steht auf MN senkrecht und geht durch E.

Beweis.

Für I,

Da in den Dreyecken MCE, NCE, die Seite

CM = CN (I Bed. 1))
ME = EN (I Bed. 3))
CE = CE (I. Cap. Arithm. §. 87.)

so ist:

$\triangle MCE = \triangle NCE$

Folglich

der W. MCE = ECN

Also $= \frac{1}{2}$ MCN;

der W. CEM = CEN (4. S.)

Also:

= R (11. Erkl.

Folglich halbirt eine Linie von der Spitze eines gleichschenklichten △ durch die Mitte seiner Grundlinie, den ihr gegenüber stehenden Winkel, und steht auf ihr senkrecht.

Für II.

Denn eine Linie CE die durch C und E gehet, steht auf MN senkrecht und halbiret den Winkel MCN (1. Behaupt.); also ist sie ein Perpendikel aus C auf MN: Aber aus C kann man nicht auf MN verschiedene Perpendikel fällen. (4. Zus.)

Folglich halbirt ein Perpendikel (CE) von der Spitze (C) eines gleichschenklichten Dreyecks (MCN) auf seine Grundlinie (MN) gefällt die Grundlinie (MN) und den ihr gegenüber stehenden Winkel (MCN).

Für III.

Geht das Perpendikel EC nicht durch C, so kann man durch E und C eine andere gerade Linie ziehen, welche ebenfalls auf MN senkrecht stünde (1. Behaupt.). Also könnte man aus E zwey Perpendikel aufrichten; Dieß ist aber nicht möglich (9. S. 4. Zus.). Folglich geht das Perpendikel EC durch C; es halbiret aber auch den Winkel MCN, weil EC durch C und E gehet. (1. Behaupt. 1))

Also

Also: Ein Perpendikel aus der Mitte eines gleichschenklichten △ Grundlinie, geht durch dieses △ Spitze, und halbirt den ihr entgegenstehenden Winkel.

Für IV).

In den beyden Dreyecken MCE, NEC, ist

MC = NC (I Bed. 1))

der W. CME = W. CNE (I. Bed. 1) 2. S. 3 Z.)

MCE = NCE (IV. Bed. 2))

Also:

△ MCE = △ NEC

Folglich W. CEM = W. CEN

Also = R (11. Erkl.);

ME = NE (3. S.)

Mithin:

$= \frac{1}{2}$ MN

Folglich geht CE durch E.

Eine Linie also, die in einem gleichschenklichten Dreyecke, den seiner Grundlinie gegenüber stehenden Winkel halbirt, steht auf der Grundlinie senkrecht, und geht durch ihre Mitte.

9. S. 6. Zusatz.

I) In jedem Dreyecke (ABC,) steht der größern Seite (AC) der größere Winkel (ABC) gegenüber.

Bedingung. In △ ABC sey die Seite AC ▷ die Seite AB.

Behauptung. Der der Seite AC gegenüberstehende Winkel ABC ▷ als der Seite AB entgegenstehender Winkel ACB.

Vorbereitung.

1) Auf der größern Seite AC nehme man AD = AB; und ziehe
2) durch D und B die gerade Linie DB.

Beweis.

Da D auf AC liegt, so muß D zwischen A und C, und deshalb DB zwischen des Winkels ABC Schenkel AB, BC, fallen: Also ist

der W. ABC ▷ ABD (Vor. 8. und E.*))

Aber der

W. ABD = ADB (1 Vorb. 2. S. 3. Z.)

Also

ABC ▷ ADB

Nun ist

ADB ▷ C (9. S.)

Folglich um so mehr

ABC ▷ C

II) Dieser Satz umgekehrt, ist:

In jedem Dreyecke (ABC) steht dem grössern Winkel (ABC) die größere Seite (AC) und

*) Bedeutet Erläuterung.

und dem kleinern (ACB) die kleinere (AB) gegenüber.

Bedingung.

Winkel ABC > C

Behauptung.

AC > AB.

Beweis

Denn wären beyde Seiten gleich,

Also:

AC = AB

so wäre auch

W. ABC = C (2. S. 3. Z.)

Wäre aber

AB > AC

so würde auch

W. ACB > ABC (I)

Beydes wider die Bedingung: Folglich muß

AC > AB

seyn.

9. Satz. 7. Zusatz.

In jedem Dreyecke (ABC) (fig. 42) sind allemal zwo Seiten, welche man will, größer als die dritte; Oder: AC + AB > BC; AC + CB > AB; BC + BA > AC.

Vorbereitung.

1) Man verlängere BA nach D;
2) Nehme AD = AC.

Beweis.

Da D über A hinaus fällt, so liegt A, zwischen D und B, und also AC zwischen DC, CB, den Schenkeln des Winkels DCB; daher ist der Winkel

$$DCB > DCA \text{ (Vorer. 8, und E.)}$$

Ferner der W. $DCA = D$ (2. S. 3. Zus.)

Folglich:

$$DCB > D$$

Mithin

$$DB > BC \text{ (6. Zus.)}$$

Aber $DB = DA + AB$ (8. Vorer.)

$$DA = AC \text{ (2) Vorb.)}$$

Also:

$$DB = AB + AC$$

Folglich

$$AB + AC > BC.$$

Wiederholet man bey C sowohl als bey B eben das Verfahren, so beweiset es daß $AC + AB > AB$, und $CB + BA > AC$.

Haben Anfänger das Verfahren bey A wohl verstanden, so werden sie es leicht bey C und B wiederholen können: daher ich es ihnen zur Uebung überlasse.

9. Satz. 8. Zusatz.

Aus vorigem Zusatze erhellet: daß man aus 3 gegebenen geraden Linien nur in so fern ein Dreyeck verzeichnen kann, wenn davon jede zwo größer als die dritte sind. Es seyen daher (fig. VII) die

drey

drey geraden Linien A, B, C gegeben, so daß bey ihnen die gleich gedachte Bedingung statt findet: Man soll aus ihnen ein Dreyeck FIG verzeichnen.

Also

Gegeben.

3 gerade Linien A, B, C, dem 7. Zus. gemäß.

Gesucht.

Die Verz. eines Δ FIG wo FI = A; FG = B; GI = C.

Auflösung.

1) Auf einer unbestimmten geraden Linie, nehme man DF = A; FG = B; GH = C;

2) Aus F als einem Mittelpunct beschreibe man mit dem Halbmesser FD den Kreis DIK, desgleichen aus G mit GH den HIL;

3) Aus dem Durchschnittspunct I, ziehe man IF, IG;

Das Dreyeck FIG wird das Verlangte seyn.

Beweis

Daß es einen Durchschnittspunct I giebt, erhellet unmittelbar aus der **Construction.**

Nun ist aber

FI = DF (2) Aufl. 13. Erkl.)
DF = A (1) Aufl.)

Also:

FI = A (Ar. I, Cap. 87. §.)

Ferner ist

FG = B (1) Aufl.)
GI = GH (2) Aufl. 13. Erkl.)
GH = C (1) Aufl.)

Mithin:

GI = C (Ar. I. Cap. 87. §.)

Folglich gleichen des Dreyecks FGI Seiten FI, FG, GH den gegebenen A, B, C.

9. Satz. 9. Zusatz.

Wenn man (43. fig.) von den Endpuncten (B, C,) einer Seite (BC) eines Dreyecks (ABC) nach einem innerhalb dieses Dreyecks genommenen Punct (D) zwey gerade Linien (BD, CD) ziehet: so wird der Winkel (A) den die beyden andern Seiten (AB, AC) einschließen, kleiner seyn, als der (BDC) den diese gezogene Linien mit einander machen, und die Summe izt gedachter Linien (BD, CD) wird kleiner seyn, als die Summe erwähnter Seiten (BA, AC) dieses Dreyecks (ABC).

Bedingung.

BD, CD sind 2 gerade von den Puncten A und B nach dem innerhalb des Δ ABC genommenen Punct D gezogene gerade Linien.

Behauptung.

I) BDC > A;
II) BD + DC < BA + AC.

Vor-

Vorbereitung.

Man verlängere BD bis sie AC in E schneidet.

Beweis

Für I Behauptung.

Der W. BDC ▷ BEC (9. S.)
BEC ▷ A (9. S.)

Also:

BDC ▷ A

Für II. Behaupt.

BA + AE ▷ BE (9. S. 7. Z.)
BE = BD + DE (8. Vorer.)

Also:

BA + AE ▷ BD + DE;
DE + EC ▷ DC (9. S. 7. Z.

Mithin

BA + AE + DE + EC ▷ BD + DE + DC
DE = DE abgez.

BA + AE + EC ▷ BD + DC (Ar. I. Cap. 88. §.)

AE + EC = AC

Also:

BA + AC ▷ BD + DC

9. Satz. 10. Zusatz.

Die kürzeste gerade Linie CA die man von einem Punct C (fig. 44) an eine gerade Linie BD ziehen kann, heißt des Puncts C **Entfernung** von BD.

Die Entfernung eines gegebenen Punctes (C) von einer gegebenen geraden Linie (BD) ist das von diesem Punct (C) auf besagte Linie (BD) gefällte Loth (CA).

Bedingung.

1) C, ein gegebener Punct.
2) BD, eine gegebene gerade Linie.
3) CA ein von C auf BD gefällte Loth.

Behauptung.

CA < als alle von C an BD gezogene gerade Linien.

Beweis.

Da CA ein Perpendikel ist (3. Bed.) so hat man mittelst jeder andern von C an BD gezogenen geraden Linie CF, ein rechtwinklichtes Dreyeck CFA. In diesem nun ist der Winkel

CAB = R, und
CFA < R (9. S. 3. Z.)

Also:

CAB > CFA

Folglich

CF > CA (9. S. 6 Z.)

9. Satz. 11. Zusatz.

Auf jeder Seite des Loths CA (44. fig.) kann man von C, an BD nur eine Linie CF ziehen die mit BD einen gegebenen Winkel CFA (der hier spitzig ist [9. S. 3. Z.]) macht.

Denn

I. Denn jede von C an BD nach irgend einen zwischen F, (dem Puncte wo CF in der Linie BD einschneidet,) und A, (dem Puncte wo das Loth CA auf BD eintrift) liegenden Puncte H gezogene gerade Linie CH, macht mit BD einen Winkel CHA, der der äussere des Dreyecks CFH ist: Folglich

W. CHA ▷ W. CFA

(9. S. 1. Zus.)

Und, jede von C an BD nach einen über F hinaus liegenden Punct G, gezogene gerade Linie macht mit BD einen Winkel CGA der kleiner als der gegebene CFA, ist, weil in dem △ CGF der Winkel CFA der äussere und CGA der innere ihm entgegengesezte ist. (9. S. 1. Zus.)

II. Nimmt man auf der andern Seite des Loths, AM = AF; so ist in den beyden Dreyecken MCA, FCA, die

Seite AM = AF;

CA = CA (beyden gemein)

W. CAF = CAM (weil CA ein Loth)

Folglich:

△ MCA = △ FCA

Also:

W. CFA = W. CMA (4. S. 2. Z.)

Nun erhellet auf eben die Art wie vorhin, daß alle Winkel, die von C auf BD gezogenen Linien an zwischen A und M fallenden Puncten gemacht werden, größer, und die an über M nach D hin-

aus liegenden Puncten entstehen kleiner als CMA, (= dem gegebenen CFA,) sind: Folglich ist auf der Seite des Loths nach B die Linien CF und auf der nach D, die Linie CM die einzige, so mit BD den gegebenen Winkel CFA macht.

III. Wäre statt des spitzigen Winkels CFA ein stumpfer CFB gegeben gewesen, so hätte man solchen als den Nebenwinkel eines spitzigen ansehen müssen, dem so viel vom rechten Winkel fehlt, als der gegebene stumpfe darüber beträgt. (8. S.) In diesem Falle ist für jeden Punct H zwischen F und A der Nebenwinkel CHB < CFB, und für jedem Punct G über F hinaus der Nebenwinkel CGB > CFB.

IV. Da

W. CFB + W. CFA = 2 R (8. S.)

CMD + CMA = 2 R (8. S.)

So ist

CFB + CFA = CMD + CMA

W. CFA = W. CMA (II) abgez.

Also

CFB = CMD

Mithin giebt es auf der andern Seite des Loths eine Linie CM die mit BD eben den gegebenen stumpfen Winkel macht. Es ist aber da ebenfalls auch nur ein CM die das thut. Denn aus eben den Gründen wie im III. erhält man für jede zwischen ACM fallende Linie stumpfe Winkel die

klei-

Kleiner, und für jeden über CM nach D hinaus fallende Linie, welche, die größer als der W. CMD, = CFB sind.

9. S. 12. Zusatz.

Hieraus erhellet: daß man von C auf einer Seite des Loths CA nicht zwo gleich große Linien an BD ziehen, kann.

9. S. 13. Zus.

— nachdem ..... nimmt.]

Nachdem man Puncte nimmt, die über F (den Punct, wo die Linie CF die mit CA den gegebenen Winkel macht, in BD eintrift) noch B hinaus, oder zwischen F und A nimmt.

9. S. 14. Zusatz.

Wenn zwey Dreyecke (ABC, abc [45 fig.]) zweene gleiche Winkel (A = a; C = c) haben, und eine gleiche Seite (AB = ab) die an einen von den gleichen Winkeln (A, a) anliegt; so ist alles übrige gleich.

Bedingung.

In den beyden Δ ABC, abc sey
1) der W. A = a; C = c
2) AB = ab
3) liege AB an A und ab an a.

Behauptung.

AC = ac
BC = bc
W. ABC = W. abc
Δ ABC = Δ abc.

Vors

Vorbereitung.

1) Man lasse von B im Δ ABC auf AC das Loth BD; desgleichen von b im Δ abc auf ac das Loth bd, herab;

2) Lege das Δ abc auf Δ ABC so, daß a auf A, b auf B und ac längst AC hinfällt.

Beweis.

Da es von einem Punct auf eine Linie nur ein Loth giebt, (9. S. 4. Z.) b aber in B und ac auf AC liegt (2. Vorber.) so muß das Loth bd das BD decken und also der Punct d auf D fallen.

Da das Dreyeck BDC bey D, und das bdc bey d rechtwinklicht ist, (1. Vorber.) so muß (nach des 9. S. 3. Z.) der Winkel BCD sowohl als bcd spitzig seyn; und daher c auf eben der Seite von BD liegen auf der C liegt. Nun kann c auf C, oder nicht, fallen: Gesezt, c fällt nicht auf C (fig. VIII) so giebt es durch B (oder auch b weil b auf B liegt) zwo Linien CB, cB, die mit AC auf einer Seite des Lothes gleiche Winkel, nämlich

C = c (1 Bed.)

machen; Dies kann aber nicht seyn (9. S. 11. Z.): Folglich fällt c auf C; und ac deckt AC: Also decken beyde Δ einander, wie im 3. Satze, und ist folglich alles in ihnen gleich.

Man sieht also, daß eine Seite und zween Winkel ein Dreyeck bestimmen, ohne daß die Seite zwischen diesen Winkeln inne, sondern nur an einen anliegt. Und diese ist die in der Erl. des

4. S. 1. Zus. erwähnte und zum 3ten Satz gehörende Ergänzung.

Folgendes kann auch als eine zum 2ten Satz angesehen werden:

Wenn zwey Dreyecke (ABC, abc [fig. 45]) **zwey Seiten und einen Winkel, der von diesen Seiten nicht eingeschlossen wird, gleich haben** (AB = ab; BC = bc; W. A = W. a) **so ist, in so ferne die dem gleichen Winkel gegenüber stehende Seite** (BC, bc) **größer ist, als die anliegende Seite** (BA, ba), **alles übrige in beyden Dreyecken gleich.**

Bedingung.

In den Dreyecken ABC, abc sey
BC = bc
AB = ab
W. A = W. a; Bc stehe A gegenüber und sey > AB, die an A anliege; desgleichen stehe bc dem W. a gegenüber und sey > ab die an a anliege.

Behauptung.

1) B = b
2) C = c
3) AC = ac
4) Δ ABC = abc.

Vorbereitung.

1) Man lasse von B und b auf AC und ac die Lothe BD, bd herab;

2)

2) Lege in Gedanken das Δ abc auf Δ ABC, so daß a auf A, der Punct b auf B und ac längst AC fällt. So müssen

Beweis.

Die Lothe BD, bd einander decken und auf D fallen; C und c aber auf einer Seite des Loths liegen, weil nach des 9. S. 3. Zus. BC und bc mit AC oder ac spitzige Winkel machen müssen. Fällt nun c nicht auf C; so gäbe es, (da bc = BC) auf einer Seite des Loths zwo gleich große Linien, welches nicht seyn kann. (9. S. 12. Zus.) Also fällt c auf C und die Dreyecke decken einander wie im 2ten Satze. Folglich ist alles in ihnen gleich.

Ein Winkel und zwo Seiten also geben nur ein Dreyeck, indem die kleinere von den gegebenen Seiten an den gegebenen Winkel anliegt, und die größere ihm entgegen steht. Auf diese letztere Bedingung ist besonders zu sehen, wenn der gegebene Winkel spitzig ist. Denn ist der gegebene Winkel A (fig. XI) spitzig, und die gegenüber stehende Seite BC kleiner als BA; so kann man noch zwischen dem Lothe BC und BA eine Linie BD, = BC ziehen, (9. S. 11. Z.) und man erhält zwey Dreyecke CBA, DBA, in den zwar die gegebenen Stücken vorhanden sind, aber das Δ BDA ist nicht gleich dem Δ CBA. (Vor. 8 und d. Erl.)

Wenn man das in diesem Zusatze mit dem was im 2, 3, 4. Satze gesagt wurde, vergleicht; so

wird man finden, daß zur Bestimmung eines geradlinichten Dreyecks, überhaupt folgende drey Stücke erfodert werden:

1) Zwo Seiten und ein Winkel [wovon entweder die Seiten den Winkel einschliessen (2. S.) oder nicht (9. S. 14. Zus. Erl.)]

2) Zween Winkel und eine Seite, [welche entweder zwischen den Winkeln inne liegt (3. S.) oder nicht. (9. S. 14. Z.)]

3) Alle drey Seiten.

Dies wird nun eine allgemeine Uebersicht der Erfordernisse zur Bestimmung eines geradlinichten Δ seyn. Daher auch der 1. und 2. Fall, hier dem 1. und 2. Fall der Erl. des 1. Zus. des 4. S. enthält, und der 3. Fall hier, dort selbst der 3te ist.

Wäre gar keine Seite, sondern alle drey Winkel gegeben, so kann dadurch in Absicht der Größe des Dreyecks nichts, oder vielmehr unzählig viel Dreyecke bestimmt werden.

10. Satz.

Gegeben

1) Eine Linie ac
2) Punct a in ac
3) Winkel A.

Gesucht

An a in ac einen Winkel bac zu setzen, der dem gegeben W. A gleich ist.

Auf-

Auflösung und Beweis.

M. s. Buch.

II. Satz.

Bedingung.

1) AB, CD (46 fig.) seyen zwo in einer Ebne liegende gerade Linien.
2) Die gerade Linie GH schneide AB und CD, so daß
   I) W. BGH + DHG, oder die Summe der beyden innern entgegengesetzten Winkel, = 2 R.
   II) W. EGB = W. GHD, oder der äussere gleich dem innern entgegengesetzten.
   III) W. DHG = W. HGA, oder die Wechselswinkel gleich.

Behauptung

AB und CD sind gleichlaufend.

Beweis.

Weil ..... gemacht werden.]

AGH + HGB = 2 R (8. S.)
CHG + GHD = 2 R (8 S.)

Also: AGH + HGB + CHG + GHD = 2 R + 2 R = 4 R

Davon

HGB + GHD = 2 R (I) Bed.) abgez.

Bleibt AGH = CHG = 2 R.

Also

Also kann auch von GH nach der Seite C, A zu, kein Dreyeck von den Verlängerten GA, HC gemacht werden, und mithin BA, DC dahin zu nicht zusammen stossen; Aber AB, CD stossen auch nicht nach B und D zu, zusammen: Folglich sind sie gleichlaufend.

II. Wenn . . . . . = 2 R.]

BGH + EGB = 2 R (8. Satz)

EGB = GHD (II. Bed.) abgez.

Also

BGH = 2 R — GHD

GHD = GHD add.

Folglich

BGH + GHD = 2 R

Wenn also GH die AB, in CD noch der II. Bed. schneidet, so thut sie es auch zugleich nach der I; Thut sie aber dieß letztere, so ist vorhin bewiesen worden, daß AB und CD gleichlaufend seyn: Folglich sind sie es auch izt.

III. Wenn . . . . . = 2 R.]

HGB + HGA = 2 R (8. S.)

HGA = GHD (III. Bed.) abgez.

Bleibt HGB = 2 R — GHD

GHD = GHD add.

Giebt HGB + GHD = 2 R

Wenn also GH die AB und CD nach der III. Bed. schneidet; so thut sie es auch zugleich nach der ersten: Folglich sind AB und CD gleichlaufend.

11. Satz. 1. Zus.

Durch einen gegebenen Punct (G) mit einer gegebenen Linie (CD) eine gleichlaurende (AB) zu ziehen.

Gegeben

Eine Linie CD und ein Punct G auſser CD.

Gesucht

Eine durch G mit CD gehende Parallellinie AB.

Auflösung.

1) In CD nehme man nach Gefallen einen Punct H an, und ziehe durch G und H die Linie GH.

2) Durch G führe man AB unter einen Winkel AGH, der = GHD, oder unter einen Winkel BGH der = CHG, ist.

Beweis.

Denn AGH und GHD, oder, BGH und CHG sind Wechselswinkel und gleich (2. Aufl.); Folglich AB mit CD parallel. (11. S. III.)

12. Satz.

Dieser Satz ist beym Euklides der 11te Grundsatz. Er hat aber nicht die in die Augen fallende Evidenz der andern Grundsätze: daher haben des Euklides Ausleger und andere Schriftsteller einen scharfen Beweis davon zu geben gesucht. Die Bemühungen hierüber findet man in der, in der Vorrede von unserm Herrn Autor angeführten, und von

dem

dem itzigen Herrn Prof. Klügel in Helmstädt, 1763 verfertigten Disputation.

Euklides hat aber diesen Satz vermuthlich deswegen in die Reihe der Grundsätze, als ein Principium, gesezt, weil er ihn als Lehrsatz nicht hat erweisen können.

In dem 2, 3, 4, 5, und 6 Zus. des 11. Satzes hat unser Herr Autor nur Erläuterungen beygebracht, die uns berechtigen diesen Satz als wahr und in dieser Rücksicht als Grundsatz anzunehmen.

Die Schwierigkeit aber die bey einem scharfen Beweise dieses Satzes obwaltet, beruht darauf, daß in der Idee von gleichlaufenden geraden Linien die versteckt liegt: was gerade in einer und derselben Ebne einerley Lage habende Linien sind, und welche weder vom Euklides noch andern spätern Schriftstellern gehörig entwickelt ist. Herr Hofr. Karsten hat ihn im 1. Th. s. Anfgr. der Mathem. im III. Abschn. der Geom. sowohl, als in einer kleinen Schrift: Versuch einer völlig berichtigten Theorie von Parallellinien, zu entwickeln und also diese Schwierigkeit zu heben gesucht. —

12. S. 1. Zusatz.

Durch ..... gleichlaufend.]

Wenn mit der Linie CD durch einen Punct G eine Linie AB gleichlaufend gezogen ist, so kann

keine andere durch G gezogene Linie GP mit CD gleichlaufend seyn.

Denn

W. DHG = W. DHG

PGH < BGH (Vorr. 8 u. E.)

Also DHG + PGH < DHG + BGH

DHG + BGH = 2 R

(weil AB mit CD parallel und 11. S.) Also:

DHG + PGH < 2 R

Folglich schneidet GP die CD (9. Grundſ.)
Also ist GP nicht der CD gleichlaufend. (9. Erkl.)

Und . . . . . andere CD.]

Denn wenn GP die AB schneidet, so ist

der W. PGH < BGH

(Vorr. 8 u. E.) Also

DHG + PGH < 2 R

Folglich schneidet sie auch CD (9. Grundſ.)

12. Satz. 2. Zusatz.

Jede Linie (EF [47 fig.]) **schneidet zwo gleichlaufende** (AB, CD) **so, daß**

I) **die Summe der beyden innern entgegengesezten Winkel** (BGH + DHG) = 2 R,

II) **der äussere** (BGE) **dem innern entgegengesezten** (DHE), **gleich ist, und**

III) **die beyden Wechselswinkel** (AGH, DHG, **einander gleich sind.**

Be-

Bedingung.

AB, CD, seyen zwo Parallellinien;
EF eine dritte Linie die beyde schneidet;
G ein Punct in AB, und EF.

Behauptung.

I) BGH + DHG = 2 R
II) BGE = DHE
III) AGH = DHG

Beweis.

Bey einer durch G nach des 11. Satzes 1. Zusatz mit CD gezogene Parallellinie sind die Wechselswinkel gleich. Da nun diese gezogene Parallellinie keine andere als AB seyn kann (12. S. 1. B.); so hat man gleich für die

III. Behauptung

W. AGH = W. DHG;

Für die

II. Behauptung

aber,

W. AGH = W. EGB

Also

EGB = DHG (III. Beh. u. Ar. I. C. 87. §.)

und für die

I. Behauptung.

W. EGB + W. BGH = 2 R
DHG = EGB (II. Beh.)

Folglich

DHG + BGH = 2 R.

fänden ꝛc.]

Schnitte eine andere Linie MN die gleichlaufenden AB, CD, in den Puncten O, und S, so daß die Bedingungen des IIten Satzes nicht statt fänden, und z. E. der äussere W. MOS < als der innere entgegengesezte wäre; so würde auch der

W. AOS < MSD (8. S. 4. Z.)

Aber

OSC = OSC

Also

AOS + OSC < MSD + OSC
MSD + OSC = 2 R (8. S.)

Folglich AOS + OSC < 2 R

und BA; DC; müssen vermöge des 12. Satzes nach der Seite A und C zusammenstossen. Da nun AB, CD als Parallellinien angenommen worden, so ist das Zusammenstossen nicht möglich: Folglich muß auch für eine andere, AB, und CD schneidende Linie MN, die Bedingungen des II. Satzes statt finden.

12. S. 3. Zus.

Parallelen zwischen Parallelen sind gleich.

Bedingung.

Es seyen AB, CD, zwo Parallellinien, die von zwo andern gleichlaufenden Linien CA, DB in den Puncten

ten A, B, C, D geschnitten" werden.

Behauptung.

1) AB = CD
2) AC = BD

Vorbereitung.

Man ziehe von dem einen Punct A nach der gegenüberstehenden D, die AD.

Beweis.

Da AD die AB und CD, desgleichen die AC und BD schneidet, so wie es der 11. Satz erfodert (12. S. 2. Zus.); so ist in den Dreyecken DAB, DAC der

W. DAB = ADC
DAC = ADB
AD = AD

Also:

Δ DAB = Δ DAC (3. S.)

und mithin:

AB = CD
DB = AC

12. Satz. 4. Zusatz.

Wenn zwo gleiche große Linien (AB = CD) zwo andere gleiche große (AC = BD) an ihren Endpuncten verbinden, so ist jedes Paar der izt genannten Linien gleichlaufend.

Bedingung

$AB = CD$
$AC = BD$,
an ihren Endpuncten unter einander verbunden.

Behauptung

AB parall. mit CD
AC parall. mit DB

Vorbereitung.

Man ziehe von A nach D die AD.

Beweis.

So ist
$AD = AD$ (Vorber.)
$AB = CD$ (Bed.)
$BD = AC$ (Bed.)
Also das Dreyeck $ABD = \Delta$ ACD; (4. Satz)
Folglich der
W. CAD = W. ADB
BAD = ADC

Nun sind CAD und ADB Wechselswinkel: Also AC parallel BD (11. S.) Auch BAD und ADC sind Wechselswinkel: Folglich ebenfalls AB und CD gleichlaufend.

Dieser Satz ist der umgekehrte des vorigen Zusatzes. Beyde aber thun die Möglichkeit eines Parallelogramms dar. (17. Erkl.)

12. S. 5. Zus.

Umgekehrt: Wenn die von RS herabgefällte Perpendikel MN, OP gleich groß sind; so ist die

durch

durch ihre Endpuncte N, P gehende gerade Linie TV mit RS gleichlaufend.

Denn (fig. XIX) der

W. b = W. a (12. S.)
OP = MN (Bed.)
NO = NO

Also △ NOP = △ MNO (2. S.)

Folglich

W. c = W. e

Mithin TV parallel RS (11. S.)

12. Satz. 6. Zusatz.

Eine zwischen den Spitzen zweener Winkel einer Figur gezogene gerade Linie, die ganz in der Figur liegt, heißt eine **Diagonale** oder **Diagonallinie.**

Wenn man also in dem Parallelogramm ABCD, die Diagonale AD zieht, so theilt diese das Parallelogramm ABCD in 2 gleiche Dreyecke ACD, ABD.

Denn (17te Erkl.)

AB = CD
BD = AC
AD = AD

Also die Dreyecke ACD, CBD gleich (4. S.)

Folglich auch die gegenüberstehenden Winkel C, B (4. S. 2. Z.) oder CDB, CAB.

Und da AC und BD parallel sind, so ist der

W. B + W. CAB = 2 R

(11. S.) und so machen jede beyde an einer Parallelogramms Seite liegende Winkel, 2 R aus.

12. Satz. 7. Zusatz.

Ist B = R; so ist auch C = R (6. Zus.)

Und da B + CAB = 2 R; so ist gleichfalls CAB = R folglich auch CDB = R (6. Zus.)

Also jeder = R.

12. Satz. 8. Zusatz.

Es sind zwo Seiten (AC, CD,) **gegeben nebst dem Winkel** (C,) **den sie einschliessen; Man soll aus ihnen ein Parallelogramm verzeichnen.**

Gegeben

Zwo Seiten AC, CD; der Winkel C den AC und CD einschliessen.

Gesucht

Die Verzeichnung eines Parallelogramms.

Auflösung.

1) Auf des Winkels C einen Schenkeln nehme man CA und auf den andern CD;

2) Ziehe AD;

3) Beschreibe über AD nach des 9. S. 8. Z. das Dreyeck ABD, wovon die eine Seite AB = der gegenüber stehenden CD; die andere DB, ebenfalls = der ihr gegenüber stehenden AC;

4) Dies

4) Dies wird geschehen, wenn man aus A mit dem Halbmesser CD, desgleichen aus D mit dem Halbmesser CA Kreisse (in der Ausübung nur ein Paar Bogen) die einander bey B schneiden, beschreibt, und denn AB und DB zieht.

Beweis.

Vermöge der Verzeichnung sind AC und CD = den gegebenen Seiten, und C ist der gegebene Winkel; Die Seite AB = CD; die DB = CA. (4. Aufl.) Also ABDC das verlangte Parallelogramm. (12. S. 4. Z. und 17. Erkl.)

12. Satz. 9. Zusatz.

— — das Rechteck ..... gleich sind.

Beym Rechteck und Quadrat braucht kein Winkel C gegeben zu seyn, da man weiß, daß er ein R seyn muß, und weil auf folgende Art sich zwo Seiten an ihre Endpuncte in einem rechten Winkel zusammen setzen lassen.

Die ganze Sache kommt auf folgende Aufgabe an.

Aus einem Endpunct A (fig. IX) einer gegebenen Linie AB ein Perpendikel aufzurichten.

Gegeben.

Endpunct A der AB.

Gesucht.

An A ein Perpendikel.

Auflö-

Auflösung und Beweis.

Ueber AD einem aus A willkührlich genommenen Stücke der Linie AB, sey ein gleichseitiges Δ ACD beschrieben, und die A gegenüber stehende Seite CD über C nach E verlängert; Von C aber, der AB entgegenstehenden Spitze dieses Δ, sey das Loth CF auf AD gefällt;.

So ist AF = FD (9. S. 8. Zus.)

Nun sey durch A mit CF die Linie AE parallel gezogen;

So ist

W. EAB = R (11. S.)

und also EA durch A auf AB senkrecht (11. Erkl.)

Ueberdies sey CG ein von C auf AC gefälltes Perpendikel; so ist CG mit AB gleichlaufend (11. S.) und daher

CG = AF (12. S. 3. Zus.)

Da nun

AF = FD

So ist auch

CG = FD (Ar. I. Cap. 87. §.)

Ferner ist

W. EGC = EFD (weil beyde = R)

ECG = CDF (11. S. II.)

Folglich:

Δ EGC = Δ EFD (3. Satz.)

Und also

CE = CD

Hier-

Hieraus nun ergiebt sich von selbst das Verfahren, das der Aufgabe Gnüge thut.

Man nimmt nämlich aus A auf AB nach Gefallen AD, beschreibt darüber ein gleichseitiges Δ ACD, verlängert die A gegenüber stehende Seite CD nach E, nimmt auf dieser Verlängerung CE = CD, und zieht AE; so ist diese das verlangte Perpendikel.

Will man nun über eine gegebene Linie AB (18 fig.) ein Quadrat verzeichnen; so richte man aus dem Endpunct A, das Perpendikel AC auf, und nehme AC = AB; Beschreibe ferner aus C und B mit dem Halbmesser AB Bogen, die einander in D schneiden, und ziehe CD und DB; so ist ABCD das verlangte Quadrat.

Denn

AB = AC
= CD
= DB.

Also

AC parallel BD
AB CD

(12. S. 4. Z.) . . . . . .

Folglich, ABCD ein Parallelogramm (17. Erkl.) in dem der Winkel A = R. (Verzeichn.) Also hat ABCD lauter rechte Winkel, (12. S. 7. Z.) aber auch lauter gleiche Seiten. (Verzeichn.) Folglich ist ABCD ein Quadrat. (16. Erkl)

Will man aber aus zwo ungleiche Seiten CA, AB, (fig. 19); ein Rechteck verzeichnen, so verfährt man so:

Aus

Aus A dem Endpunct der einen gegebenen Seite AB richtet man ein Loth auf, und nimmt darauf AC gleich der andern gegebenen Seite CA; beschreibt aus C mit dem Halbmesser AB und aus D mit dem Halbmesser AC, Bogen die sich in D schneiden; ziehet hierauf CD, DB; so ist ABDC das verlangte Rechteck.

Denn

$$AB = CD$$
$$AC = BD$$

Also

AB mit CD

und

AC mit BD

parallel. (12. S. 4. Z.)

Folglich ABCD ein Parallelogramm (17. Erkl.) das einen rechten W. A hat (Verz.). Also hat es lauter rechte Winkel, (12. S. 7. Z.) aber auch gleich große gegenüberstehende Seiten. (Verz.) Folglich ist es ein Rechteck. (16. Erkl.)

Der 3 und ..... sind.]

Aus zwo Seiten (A, B [fig. XII.]) und einem Winkel (C,) kann man nach des 12. S. 3. Zus. auf folgende Art ein Parallelogramm zeichnen. Auf einer Linie ab, nehme man DG = B, ziehe nach dem 10. Satze durch den Punct D (den einen Endpunct von DG,) eine Linie in den gegebenen Winkel C, und nehme auf ihr DE = A; durch G, (den andern Endpunct von DG) ziehe

man

man vermöge des 11. S. 1. Zus. mit DE eine Linie GF und durch E mit DG eine Linie EF parallel; so ist EDGF das verlangte Parallelogramm.

Denn DE und GF, desgleichen auch EF und DG sind parallel (Verzeichn.)

Also $\left.\begin{matrix} DE = GF \\ EF = DG \end{matrix}\right\}$ (12. S. 3. Z.)

und da

W. EDG = C

so ist folglich EDGF das verlangte Parallelogramm. (17. Erkl.)

Nach des 12. S. 5. Zus. aus den zwo gegebenen Linien A, B (fig. XIII.) ein Rechteck z. E. zu verzeichnen, verfahre man so:

Auf einer Linie ab nehme man CF = B, richte aus C das Loth CD = A und aus F das Loth FE, auf; ziehe hierauf durch D mit CF eine Parallele DE; so ist CDEF das verlangte Rechteck.

Denn

CF ist parallel DE (Verz.)
CD, FE sind Perpendikel zwischen diesen Parallelen.

Also

CD parallel FE und
CD = FE (12. S. 5. Z.)
= A (Verz.)

Folglich

CF = DE (12. S. 3. Z.)
= B (Verz.)

Also CDEF das verlangte Rechteck. (16. Erkl.)

12. Satz. 10. Zusatz.

Wenn man in einem Parallelogramme PQRS

1) Die Diagonale PR zieht;

2) In PR nach Gefallen einen Punct Y annimmt;

3) Durch diesen mit der einem Seite PQ des Parallelogramms PQRS eine Linie TV und mit RQ eine WX, parallel ziehet;

So entstehen vier Parallelogramme EXYT; XYRV; YVQW; YWPT; Von diesen wird behauptet:

Daß die beyden, SXYT; VYWQ; durch welche die Diagonale PR, nicht geht, gleich sind.

Denn da

TYWP; XYRV

Parallelogramme sind; (3. Bed.)

und

PY des erstern

YR des andern

(1, 2, 3. Bed.) Diagonale ist;

So ist

Δ TYP = Δ PYW

Δ XYR = Δ RYV

(12. S. 6. Zus.) Ueberdies

Δ PSR = Δ PRQ (12. S. 6. Z.)

Nun:

Nun:

Δ TYP $=$ Δ PYW abgez.

Giebt:

Δ PSR — Δ TYP $=$ Δ PRQ — Δ PYW

Ferner:

Δ XYR $=$ Δ RYV abgez.

Läst: Δ PSR — Δ TYP — XYR $=$ Δ PRQ — Δ PYW — Δ RYV

(Ar. I. Cap. 88. §.)

d. i.

STYX $=$ YWQV

Das sind aber die beyden Parallelogramme, durch welche die Diagonale nicht geht. Sie sind also gleich.

12. Satz. 11. Zusatz.

Wenn SP ..... Seite PW.]

Wenn

SP $=$ SR

Also

SQ *) eine Raute (16. Erkl.)

so ist Δ PSR gleichschenklicht, und daher

W. SPR $=$ W. SRP (2. S. 3. Z.)

Da

*) Man bezeichnet der Kürze wegen jedes Parallelogramm durch zween Buchstaben, die an gegenüberstehenden Winkeln stehen; Also kann man das Parallelogramm PQRS, so wohl durch SQ, als PR bezeichnen.

Da nun

SR und TY parallel sind (3. Bed. vor. Z.)

und

W. TYP ein äusserer
SRP sein innerer entgegengesezter;

---

so ist

$TYP = SRP$ (11. E.)

Folglich

$= SPR$

Also sind in

dem Δ PTY

Die Winkel

an der Grundlinie PY

gleich; Folglich

das Δ selbst gleichschenklicht (3. Z. 2. Z.)

Mithin

$TP = TY$

Weil nun

TP mit YW
PW mit TY

parallel ist (3. Bed. vor. Zus.)

So ist:

$PW = TY$
$= TP$

Folglich

1) TW eine Raute

deren Seite

PW;

Eben so ..... und WQ.]

Weil

SR

SR = PQ
RQ = SP } (12. S. 3. Zus.)

So ist:

RQ = PQ (Ar. I. Cap. 87. §.)

Folglich

△ PQR gleichschenklicht

und daher

W. QPR = W. PRQ

Da nun

VY parallel mit PQ (3. Bed. v. Z.)
W. RYV ein äusserer
W. YPQ der innere ihm entgegengesezte.

So ist

W. RYV = RPQ (11. S.)
= YRV

Also:

YV = VR (3. S. 2. Z.)

Da aber

YV mit WQ
VQ mit YW

parallel (3. Bed. vor. Z.)

so ist

WQ = YV (12. S. 3. Z.)
= VR

Folglich

II) XV eine Raute (16. Erkl.)

deren

Seite = WQ.

Da

YW un = WQ (2. Bed. v. Z.)

so ist

III) YQ eine längliche Raute (3. Beding. 16. Erkl.)

deren eine Seite

YW = PW (I)

die andere aber

WQ

ist.

Der ..... Raute XV]

IV) Der

länglichten Raute SY

Seiten sind

TY und ST (2, 3. Bed. v. Z. 16. Erkl.)

die eine davon,

TY, = TP (I)
= PW

die andere aber,

ST, = RV (12. S. 3. Z.)
= YV (II)
= WQ (12. S. 3. Z.)

Wenn man also die Verfahren (1, 2, 3) vor. Zusatzes bey einer Raute anbringt; so erhält man eine Raute SQ deren Seite aus 2 Stücken PW, WQ besteht: — Diese Stücken sind ganz willkührlich, weil man Y, oder W, nach Gefallen nehmen, und durch einen Punct mit einer Linie QR nur eine Parallele WX gezogen werden kann. — Eine solche Raute besteht demnach 1) aus zwo Rauten TW, XV davon die eine TW das Stück

PW,

PW, die andere XV aber, das Stück WQ zur Seite hat; 2) aus 2 gleich großen länglichen Rauten SY; YQ deren Seiten die beyden Stücke PW, WQ sind.

weil man ..... kann.]

In dem Falle hier, da SPQ = R und also SQ ein Quadrat ist, ist WX ein Perpendikel; und nach des 9. S. 3. Zusatz das einzige, das durch den Punkt W in PQ geht.

... die beyden Rauten ..... Seiten hat.]

Es wird nämlich aus der Raute TW ein Quadrat, dessen Seite PW, (I) und aus der Raute XV ein Quadrat dessen Seite WQ (II) ist, indeß die beyden gleich großen länglichten Rauten SY; YQ in zwey gleich große Rechtecke verwandelt werden, deren jedes PW, WQ (III, IV) zur Seiten hat.

Einer ..... andern WQ.]

Dies kommt mit dem 1. Lehrsatze des IV. Cap. der Arithmetik überein, nur dort statt Zahl, Linie, oder allgemein, Größe, genommen. Sezt man PW = a; QW = b; so besteht der Linie PQ Quadrat SQ, aus den beyden Quadraten der Stücke a und b; d. i. aus a^2 und b^2; und dem doppelten Rechtecke eines Stücks a mit dem andern b; d. i. (wie die Folge [42. S.] zeigt) 2ab. Also das Quadrat von PQ arithmetisch ausgedruckt ist.

$$a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$$

wie gehörig. (Ar. IV. Cap. I. Lehrs.)

13. Satz.

In jedem Dreyecke ist die Summe aller drey Winkel zweenen rechten Winkeln gleich.

Bedingung.

In dem Δ ABC (51 fig.) seyen A, B, ACD die Winkel.

Behauptung.

$$A + B + ACD = 2\,R.$$

Vorbereitung.

1) Man ziehe durch einen Winkelpunct C des Δ ABC die Linie CE gleichlaufend mit der C entgegen stehenden Seite AB (11. S. 1. Z.); und

2) verlängere die an C anliegende Seite BC, nach D.

Beweis.

Da

A und ACD Wechselswinkel

sind, und

ECD der äussere dem innern B entgegengesezte Winkel (Vorber.) ist;

so ist

$$\left.\begin{matrix} A = ACD \\ B = ECD \end{matrix}\right\} \text{(12. S. 2. Z.)}$$

Ueberdieß

$$BCA = BCA \text{ (Ar. I. Cap. 87. §.)}$$

Folglich:

$$A + B + BCA = ACD + ECD + BCA$$

Aber

Aber

$$ACD + ECD + BCA = 2R \text{ (8. S. 2. Z.)}$$

Also:

$$A + B + BCA = 2R$$

13. Satz. 1. Zusatz.

Der äussere Winkel eines Dreyecks ist gleich der Summe der beyden ihm im Dreyecke gegenüberstehenden Winkeln.

Bedingung.

Im Dreyecke ABC (51. fig.) sey ACD der äussere Winkel, A und B aber, die ihm im Δ entgegen stehenden Winkel.

Behauptung.

W. $ACD = A + B$.

Beweis.

$$ACD + ACB = 2R$$
$$A + B + ACB = 2R$$

Also

$$A + B + ACB = ACD + ACB$$
$$ACB = ACB \text{ abgez.}$$

Folglich

$$A + B = ACD$$

Folgerung.

Ist

$$A = B$$

Also

ACB ein gleichschenklichtes Δ;

so ist

$$ACD = 2A = 2B$$

Der äussere Winkel ACD an dem Scheitel C eines gleichschenklichten Dreyecks ABC, ist doppelt so groß, als jeder der Winkel B, A an der Grundlinie AB.

Ferner folgt hieraus von selbst, daß beym gleichseitigen Dreyeck allemal der äussere Winkel doppelt so groß ist, als jeder ihm im Δ entgegenstehender.

13. Satz. 2. Zusatz.

Wäre

$$B = R$$

Also

ABC ein rechtwinklichtes Δ

wo

A und ACB die beyden schiefen Winkel sind;

so ist

$$A + ACB = R.$$

Denn

$$B + A + ACB = 2R \text{ (13. S.)}$$
$$B = R \text{ abgez.}$$

$$A + ACB = R$$

13. Satz. 4. Zusatz.

Das Δ ABC sey gleichseitig; so ist

$$A = B = ACB;$$

und

und $A + B + ACB = 3\,A$
$= 3\,B$
$= 3\,ACB$ (3. S. 3. Z.)
$= 2\,R$ (13. S.)

Also

$\frac{2}{3}\,R = A, = B = ACB.$

13. S. 5. Zusatz.

... so ist ..... $= R - \frac{1}{2}\,B.$]

$A + ACB + B = 2\,R$ (13. S.)
$= \quad B = \quad B$ abgez.

$A + ACB = 2\,R - B$
$A + ACB = 2\,A = 2\,ACB$ (2. S. 3. Z.)

Also

$2\,A = 2\,ACB = 2\,R - B$

Folglich

$A = ACB = \frac{2\,R - B}{2} = R - \frac{B}{2}$

Oder ..... $2\,R - 2\,A$]

$B + A + ACB = 2\,R$ (13. S.)
$B + A + ACB = B + 2\,A$ (weil $A =$ ACB gegeben)

Also $B + 2\,A = 2\,R$
$2\,A = 2\,A$ abgez.

$B = 2\,R - 2\,A$
$= 2\,(R - A)$

13. Satz. 5. Zus. Anm.

Wenn man Winkel mit einander vergleichen will, so muß man einen von ihnen als das Maaß

oder Einheit aller übrigen fest setzen. Bisher haben wir den rechten Winkel dazu gebraucht, und alle Winkel durch ihr Verhältniß zum rechten Winkel ausgedrückt, indem wir sahen, ob ein oder mehrere Winkel < oder = oder > R, auch welcher Theil oder welches Vielfache vom R der oder die gegebenen Winkel waren, wovon unter andern gegenwärtiger 13. S. mit seinen Zusätzen zum Beyspiele dienen kann.

Wollte man nun ferner den rechten Winkel = Eins setzen, so müßte man alle spitzige Winkel durch eigentliche Brüche und die meisten stumpfe durch uneigentliche Brüche, oder durch ganze Zahlen mit angehängten eigentlichen Brüchen ausdrücken. Theilt man aber den rechten Winkel in aliquote Theile, giebt ihnen besondere Namen, so kann man die Größe jedes Winkels in einer oder mehrere ganze Zahlen unter den gegebenen Namen bestimmen. Man stelle sich daher den rechten 2c. (s. Buch bis kämen).

So kann ..... ausdrücken.]

Diese Zeichen sezt man an den Zahlen, an die sie kommen müssen, oben zur Rechten, und der Ausdruck 50° 12′ 17″, z. E. muß 50 Grade 12 Minuten 17 Sekunden gelesen werden.

So ist 2c.]

Auch

$2\,R = 180°$;

$4\,R = 360°$

Also beträgt die Summe der drey Winkel in einem geradlinichten Δ, sowohl als die Summe zweer Nebenwinkel, oder, aller an einer Spitze auf einer Seite einer Linie liegenden Winkel = 180°;

Die Summe alle in einer Ebne um einem Punct herumliegende Winkel = 360°. Wären diese Winkel alle gleich groß, und z. E. ihrer 7; so wäre jeder

$$\frac{360°}{7} = 51\tfrac{3}{7}\text{ Grad} = 51°\tfrac{3}{7}$$

Da nun $1° = 60'$ (weil $1' = \frac{1°}{60}$)

so ist

$$\tfrac{3}{7} \cdot 1° = \tfrac{3}{7} \cdot 60' = \frac{180'}{7} = 25'\tfrac{5}{7}$$

Eben so ist

$$\tfrac{5}{7} \cdot 1' = \tfrac{5}{7} \cdot 60'' = \frac{300''}{7} = 42''\tfrac{6}{7}$$

Wenn der 60ste Theil einer Sekunde eine Tertie heißt, und durch $'''$ bezeichnet wird; so ist

$$\tfrac{6}{7} \cdot 1'' = \tfrac{6}{7} \cdot 60''' = \frac{360'''}{7}$$

$$= 51''' \tfrac{3}{7} = 51''',4285\ldots$$

Also kann man $\frac{360°}{7} = 57°\tfrac{3}{7}$ durch

$$57°\ 25'\ 42''\ 51'''\tfrac{3}{7} =$$
$$51°\ 25'\ 42''\ 51''',4285\ldots$$

ausdrücken.

Wenn

Wenn die Größe eines Winkels in einem Δ durch Grade ꝛc. gegeben, so findet man die Summe der beyden andern, wenn man die gegebene Anzahl Grade ꝛc. von 180° subtrahirt. Es sey im 5. Zus. $B = 50° 12' 17''$; so ist die Rechnung folgende:

$179° 59' 60''$ *)
abgez. $50° 12' 17'' = B$

Giebt:

$129° 47' 43'' = A + ACB;$

Da (5. Z.) $A = ACB$, so ist

$64° 53' 51'' \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(A + ACB) = A = ACB.$

Weiß man die Größe zweener Winkel, so findet sich der dritte, wenn man ihre Summe von 180° abzieht. Es sey

$A = 17° 58' 33''$
$B = 43° 52' 43''$

so ist $A + B = 61° 57' 16''$
Dies abgezogen
von $179° 59' 60''$

Giebt $ACB = 118° 8' 44''$

13. S.

*) $= 180°$; dergleichen Ausdrücke der 180° bedient man sich um bequem abziehen zu können; Wäre der Winkel in Grad und Minuten gegeben, so hätte man für 180° den Ausdruck 179° 60', gewählt, und für einen in Grade, Minuten, Sekunden und Tertien ausgedruckten Winkel den Ausdrnck 179° 59' 59'' 60''' genommen.

13. S. 6. Zusatz.

Es sey . . . . . (n — 2) . 2 R.]

Ist die Zahl der Seiten = n, so hat man in der Figur ABCDEFA auch n Dreyecke ANB, BNC ꝛc. Also n . 2 rechte Winkel. Unter diesen aber sind 4 R, alle die um N, die nicht zu den Winkeln der Figur gehören; Folglich müssen sie von n . 2 R weggenommen werden: Mithin ist die Summe der Winkel der Figur

$$= n \cdot 2\,R - 4\,R = n \cdot 2\,R - 2 \cdot 2\,R$$
$$= (n - 2)\,2\,R.$$

Exempel.

Es sey

$n = 3$; also die Figur ein Δ; so ist

$$(n - 2)\,2\,R = (3 - 2)\,2\,R = 2\,R,$$

wie der 13. S. erfodert.

Für

$n = 4$; also die Figur ein Viereck;

ist

$$(n - 2)\,2\,R = (4 - 2) \cdot 2\,R = 4\,R,$$

des 12. S. 6. Zus. gemäß.

$n = 5$; also für ein Fünfeck

$$(n - 2) \cdot R = (5 - 2)\,2\,R = 6\,R$$

$n = 6$; also für ein Sechseck

$$(6 - 2)\,2\,R = 8\,R$$

$n = 7$, also für ein Siebeneck

$$(7 - 2)\,2\,R = 10\,R$$

$n = 8$, also für ein Achteck

$$(8 - 2) \cdot R = 12 \cdot R.$$

Hieraus

Hieraus sieht man auch, daß die Summe aller Winkel um 2 R zunimmt, wenn die Zahl der Seiten um 1 wächst.

Folgerung.

Verlängert man in der Figur ABCDEFA (fig. XIV) jede Seite, AB nach b und a, BC nur nach c, cD nach d, DE nach e, EF nach f; so entstehen äussere Winkel bBC, eCd u. s. f. Jeder derselben beträgt mit seinem innern als seinem Nebenwinkel 2 R. Nun sind so viele äussere, und auch innere Winkel als die Figur Seiten hat, vorhanden. Ist daher die Zahl der Seiten = n, so hat man n . 2 R, als so viel die Summe der äussern und innern Winkel zusammen beträgt. Nimmt man daher die Summe der innern Winkel von n . 2 R weg; so bleibt die Summe der äussern Winkel übrig. Die Summe der innern Winkel aber = n . 2 R — 4 R (vor. Zus.) Folglich die Summe der äussern

$$n \cdot 2R - (n \cdot 2R - 4R) =$$
$$n \cdot 2R - n \cdot 2R + 4R = 4R.$$

Und also bey allen Figuren gleich groß.

Aus dieser allgemeinen Eigenschaft hat der Herr Prof. Lexel in Petersburg zwo allgemeine Formeln hergeleitet, wodurch sich leicht bey jeder Figur trigonometrische Berechnungen anstellen lassen. Sie stehen in den Nov. Comment. Petrop. IXX; XX; Band.

13. Satz. 7. Zusatz.

In einer ordentlichen Figur (18. Erkl. und d. Erl.) sind die Vieleckswinkel einander gleich. Da nun ihre Summe $= (n - 2)\ 2\,R$ beträgt; so ist jeder davon der nte Theil; Also jeder

$$= \frac{(n-2)\ 2\,R}{n} = \frac{n-2}{n} \cdot 2\,R.$$

Ist

$n = 3$, also die Figur ein gleichs. Δ

so ist da der Vieleckswinkel

$$\frac{3-2}{3} \cdot 2\,R = \tfrac{2}{3}\,R$$

wie des 13. S. 4. Z. erfodert.

$n = 4$, also die Figur ein Quadrat, giebt für den Vieleckswinkel

$$\frac{4-2}{4} \cdot 2\,R = R$$

des 12. S. 9. Z. gemäß.

Für $n = 5$; ist

$$\frac{n-2}{n} \cdot 2\,R = \frac{5-2}{5} \cdot 2\,R = \tfrac{6}{5}\,R = R + \tfrac{1}{5};$$

$n = 6$;

$$\frac{6-2}{6} \cdot 2\,R = \tfrac{5}{6}\,R = R + \tfrac{2}{6}\,R;$$

$n = 7$;

$$\frac{7-2}{7} \cdot 2\,R = \tfrac{10}{7}\,R = R + \tfrac{3}{7}\,R$$

$n = 8$;

$\frac{8-2}{8}$

$$\frac{8-2}{8} \cdot 2\,R = \tfrac{12}{8} \cdot R = R + \tfrac{4}{8}\,R \text{ u. s. w.}$$

Bey einer regulären Figur sind auch die äussern Winkel gleich groß; weil die innern es sind, und jeder mit seinem äussern $= 2\,R$ ist. Da nun der äussern Winkel Summe $= 4\,R$; so ist jeder

$$= \frac{4}{n}\,R$$

Z. E. für $n = 3$ ist

$$\frac{4}{n}\,R = \tfrac{3}{4}\,R.$$

des 13. S. 1. Zus. u. d. Erl. gemäß.

Für $n = 4$, ist

$$\frac{4}{n}\,R = \tfrac{4}{4}\,R = R$$

wie gehörig;

$$n = 5$$

ist

$$\frac{4}{n}\,R = \tfrac{4}{5}\,R$$

u. s. w.

13. Satz. 7. Zusatz. Anm.

Dieser Zusatz ꝛc.]

Nämlich der 6te Zusatz des 13. S.

Wenn man ihre . . . . . berechnen.]

Einer von den einwärtsgehenden Winkeln der Figur (fig. XV.) sey FGE; so ist das was davon

nach

nach innen zuliegt, und den erhabenen Winkel GXE ausmacht > 2 R (8. S. Erl.) also, das was davon nach aussen liegt und den Hohlwinkel GFE ausmacht < 2 R; beyde Winkel (X und F) aber betragen zusammen 4 R (8. S. 2. Z.); und der erhabene Winkel so viel über 2 R als der Hohlwinkel darunter; denn $F = 2R - \alpha$ (8. S.); $GXE = GXn + \alpha = 2R + \alpha$. Den Hohlwinkel GFE nennt man die **Ergänzung** oder Compliment des erhabenen Winkels GXE zu 4 R; so wie umgekehrt der erhabne Winkel GXE des hohlen Winkels GFE **Ergänzung** zu 4 R heißt. Bey Berechnung der Summe der Winkel der Figur (ABCDEFGHI) muß man den erhabenen (X, V) der einwärtsgehenden Winkel nehmen, wenn man diese Berechnung ebenfalls nach des 13. S. 6. Zus. bewerkstelligen will, weil in dem Beweis daselbst jeder Winkel nach dem geschätzt wird, was nach innen der Figur zu gekehret ist: also der Beweis und folglich die dort gefundene Formel nur für dergleichen Winkel gilt.

Man ..... dieses.]

Man schätzt einen Winkel, wie ABC, gemeiniglich (fig. XV.) nach dem was er weniger als 2 R beträgt, und den Hohlwinkel ABC ausmacht.

Zuweiln aber nimmt man auch des Hohlwinkels (ABC) Compliment zu 4 R, den erhabenen Winkel AVC.

Man mag nun ABC, oder AVC messen; so erhält man durch jenes Verfahren sowohl als durch

dieses von der Größe des Winkels einen richtigen Begrif.

Bey Figuren die einwärtsgehende Winkel haben, beträgt die Summe der äussern an den innern auswärtsgehenden anliegenden Winkel, (wovon jeder die Ergänzung seines auswärtsgehenden zu 2 R ist) weniger der Summe der Ueberschüsse der erhabenen einwärts gehenden Winkel über 2 R, vier rechte Winkel; wenn also jene Summe S, diese, ς heißt; so ist

$$S - \varsigma = 4\,R.$$

Ist $\varsigma = 0$, daß also die Figur lauter auswärtsgehende Winkel hat; so ist $S = 4\,R$, der Folgerung des 13. S. 6. Zus. gemäß. Den Beweis von $S - \varsigma = 4\,R$ findet sich in Herrn Hofr. Karstens Anfangsgr. der Mathem. im 147. §. der Geometrie.

14. Satz.

Bedingung.

Die Parallelogramme BD, BF stehen auf einer Grundlinie BC (54 f.) zwischen ihr und einer Parallele FA, so, daß die BC entgegenstehenden Seiten in dieser Parallele liegen.

Behauptung.

Das Parallelogramm BD = dem Parallelogramme BF.

Beweis.

Beweis.

Das Parallelogramm BF kann in Ansehung des Parallelogramms BD dreyerley Lage haben

I) Kann der Endpunct E der Seite EF des Parallelogramms BF in der verlängerten Seite AD des Parallelogr. BD liegen (54 f.);

II) Kann E zwischen A und D (55 fig.) und

III) E in D, fallen. (fig. XVI.)

Für I)

muß BE, die Seite CD irgendwo, in G, zwischen den Parallelen AF, BC, schneiden.

Nun ist

$$\left.\begin{array}{l} AD = BC \\ BC = EF \end{array}\right\} \text{(12. Erkl.)}$$

Also

$$AD = EF$$
$$DE = DE \text{ (Ar. I. Cap. 87. §.)}$$

Folglich

$$AD + DE = EF + DE \text{ (Ar. I. C. 88. §.)}$$

Mithin

$$AE = DF$$

Ferner ist

$$\left.\begin{array}{l} AB = DC \\ BE = FC \end{array}\right\} \text{(17. Erkl.)}$$

Folglich:

$$\triangle ABE = \triangle DCF \text{ (4. S.)}$$

$$\Delta\ DEG = \Delta\ DEG$$

Also

$$\Delta\ ABE - \Delta\ DEG = \Delta\ DCF - \Delta\ DEG$$

(Ar. I. C. 88. §.)

d. i.

$$ADGB = EGCF$$

Auch ist

$$\Delta\ BGC = \Delta\ BGC$$

Mithin

$$ADGB + \Delta\ BGC = EGCF + \Delta\ BGC$$

d. i.

Parallelogr. ADCB = Parallelogr. EBCF.

Für II)

ist

$$\left.\begin{matrix} AD = BC \\ BC = EF \end{matrix}\right\}$$ (17. Erkl.)

Also

$$\left.\begin{matrix} AD = EF \\ ED = ED \end{matrix}\right\}$$ (Ar. I. Cap. 87. §.)

Folglich

$$AD - ED = EF - ED$$

d. i.

$$AE = DF$$

Ferner ist:

$$\left.\begin{matrix} AB = DC \\ EB = FC \end{matrix}\right\}$$ (17. Erkl.)

Folglich

$$\Delta\ ABE = \Delta\ DCF$$ (4. S.)

EBCD

EBCD = EBCD (Ax. I. C. 87. §.)

Also

Δ ABC + EBCD = Δ DCF + EBCD

(Daſ. 88. §.)

D. i.

das Parallelogr. ABCD = Parallgr. EBCF

Für III)

iſt

AE = BC
BC = EF } (17. Erkl.)

Also

AE = EF

Ferner:

AB = EC
EB = FC

Folglich

Δ ABE = Δ ECF
Δ EBC = Δ EBC

Mithin

Δ ABE + Δ EBC = Δ ECF + Δ EBC

D. i.

Parallelogr. ABCE = Parallelogr. EBCF

14. Satz. 1. Zuſatz.

Denn man kann ſolche Parallelogramme BD, bF (fig. XX.) ſo auf einander legen, daß ihre Grundlinien CB, cb, zuſammen fallen, (wie fig. XVIII.) Da nun ihre Höhen HI, GE gleich groß ſind, und auf HG, der Verlängerung von BC, ſte-

hen, so liegen ihre Endpuncte I, E, in einer Parallele mit BC, (12. S. 5. Z. u. d. Erl.) Sie liegen aber auch in den BC entgegenstehenden Seiten AD, EF; Also fallen AD, EF in eine gerade mit BC gleichlaufende Linie AF; Folglich stehen die Parallelogramme BF, BD über einer Grundlinie, und zwischen einerley Parallele: Folglich sind sie gleichen Inhalts (14. S.).

Statt eines gegebenen schiefwinklichten Parallelogramms kann man also allezeit ein rechtwinklichtes verzeichnen, das jenem gleich ist: Denn man darf nur die eine Seite des rechtwinklichten der Grundlinie, und die andere Seite der Höhe des andern Parallelogramms gleich machen.

Der umgekehrte Satz des 14ten ist:

Parallelogramme BD, BF **über eine Grundlinie** BC **und von gleichem Inhalt, haben gleich große Höhen** EG, IH; **oder, welches einerley ist, die** BC **gegenüberstehenden Seiten liegen in einer Parallele** AF **mit** BC.

Denn ist AF nicht mit BC gleichlaufend, so sind AIH, und AEG, nicht rechte Winkel (11. S.); aber doch, weil IH, EF parallel sind (11. S.) ist

$$HIE + GEA = 2\,R \text{ (12. S.)}$$

Also muß von diesen beyden Winkeln einer stumpf und der andere spitzig seyn. Es sey GEA stumpf, und man kann durch E mit CB eine Parallele (11. S. 1. Z.) ziehen; diese sey EL; Sie muß also auf

EG

EG senkrecht stehen (12. S.); folglich unter EA fallen, und DC, sowohl als AB schneiden. Bey DC geschähe es in K, bey AB aber in L; Nun stehen die Parallelogramme LBCK, EBCF über einer Grundlinie BC, und weil EL eine Parallele mit BC seyn soll, auch zwischen einerley Parallelen;

Folglich ist das

Parallelogr. LBCK = Parallelogr. EBCF;

Aber

Parallelogr. BADC = Parallelogr. EBCF,

wie angenommen wurde:

Folglich

Parallelogr. LBCK = Parallelogr. BADC.

welches ungereimt ist, weil jenes ein Thail von diesem ist. Daher giebt es keine Parallele EL die von AF verschieden wäre: oder AF ist mit BC parallel.

14. Satz. 2. Zusatz.

und diese ..... sind gleich.]

Also auch ihre Hälften, (Ar. 1. Cap. 88. §.) diese aber sind die Dreyecke ACD, CMD.

Folglich

$\Delta ACD = \Delta CMD.$

Eben das ..... gleich sind.]

Dreyecke über gleiche Grundlinien in gleicher Höhe sind gleich.

Denn man kann sie so auf einander legen, daß ihre Grundlinien zusammen fallen: Alsdenn aber

liegen ihre Spitzen A, M in einer Parallele AE mit der gemeinschaftlichen Grundlinie CD, weil die Perpendikel, Aa, Mm die von ihren Spitzen A, M auf ihre Grundlinien CD oder deren Verlängerung gefällt sind, — ihre Höhen, — gleich groß seyn sollen, und daher ihre Endpuncte A, M mit CD in einer Parallele AM liegen. (12. S. 6. Z. u. d. Erl.)

12. S. 4. Zusatz.

Man sieht hieraus, daß mittelst dieser Verzeichnung allemal ein Parallelogramm entsteht, das mit dem gegebencn △ eine gleiche Höhe und halb so große Grundlinie hat.

12. S. 5. Zus.

Um ein △ ABC in ein gleich großes Parallelogramm, daß einen gegebenen Winkel D und eine gegebene Seite O hat, zu verwandeln, halbire man

1) des △ ABC Grundlinie BC in E, und
2) setze an diesen Punct einen Winkel FEC = dem gegebenen Winkel D (10. S.);
3) verlängere dessen Schenkel FE in K, und
4) ziehe durch C mit FE eine Parallele CG;
5) verlängere diese sowohl, nach M, als
6) BC in H, und
7) nehme man CH = der gegebenen Seite O;
8) ziehe hierauf HI mit CG (11. S. 1. Z.), und
9) durch A die Linie HI mit BC gleichlaufend; beyde schneiden einander in I;

10) Nun ziehe man durch I und C die Linie IC,
11) verlängere sie in K bis sie mit der verlängerten FE d. i. mit EK in K zusammenstößt;
12) Hernach ziehe man durch K mit BH eine Parallele KL (11. S. 1. Z.), diese wird GM in M und IH in L begegnen;

Und so erhält man das verlangte Parallelogramm CHLM (= FECG = Δ ABC) wo CH = der gegebenen Seite (7) und der Winkel M, = dem gegebenen Winkel D.

Denn vermöge aller der Verfahren ist FKLI ein Parallelogramm, in welchem FKL der gegebene Winkel D (12. S; 2, 3, 12) IK die Diagonale und C ein Punct in ihr, durch das GM mit IL, (8) EH mit KL (12) parallel geht; Alles dieses aber kommt mit des 12. S. 10. Z. überein; Folglich ist das

Parallelogr. FC = Parallelogr. CL

Aber

FC = Δ ABC (14. S. 4. Z.)

Also:

Parallelogr. CL = Δ ABC

In diesem Parallelogramm nun ist die Seite CH = der gegebenen O (7) und der Winkel CML = dem gegebenen Winkel D. (12. S; 12, 4, 5.)

14. Satz. 6. Zusatz.

Will man ein Parallelogramm (fig. XXI.) verzeichnen, daß einer gegebenen Figur ABCDEA

gleich ist, und eine gegebene Seite und einen gegebenen Winkel hat; so verfährt man, mittelst des vor. Zus. auf folgende Art:

1) Man theile die gegebene geradlinichte Figur durch Diagonale in Dreyecke ABC, ACD, AED;

2) Verzeichne nach dem vorigen Zusatz ein Parallelogramm FNHG = △ ABC, das die gegebene Seite und den gegebenen Winkel hat;

3) Eben so verzeichne man statt des 2ten △ ACD ein Parallelogramm nhmi, das gleichfalls die gegebene Seite und den gegebenen Winkel hat;

4) Verlängere hierauf FN nach M, und

5) nehme NM = nm;

6) Ziehe ferner durch M eine Parallele mit NH;

7) Mache MI = mi = NH;

so wird das

Parallelogr. NHMI = Parallelogr. nhmi (14. S. 1. Z.) = △ DAC (3).

8) Auf eben die Art verfahre man mit dem △ AED; und man wird ein neues Parallelogram MIKL erhalten, welches ebenfalls an das vorige FMIG wegen der gleichen Seite und dem gleichen Winkel mit demselben, anschliessen und mit ihm ein Ganzes ausmachen wird.
Also ist das Parallelogram FLKG
= Parallelogr. FGNH + Parallelogr. NHIM + Parallelogr. MIKL
= △

$= \Delta ABC + \Delta ADC + \Delta AED.$ = Figur ABCDEA.

9) Verfährt man so mit allen Δ worein sich die gegebene Figur theilen läßt; so erhält man endlich ein Parallelogramm, das einen gegebenen Winkel und eine gegebene Seite hat, und alle den Δ zusammen genommen, folglich der ganzen Figur gleich ist. (8)

14. S. 7. Zusatz.

Dieß geschiehet auf gleiche Art wie im vorigen Zusatze; nur ist hier der gegebene Winkel = R, und muß daher statt daß im 14. S. 5. Zus. an E (fig. 58) der gegebene Winkel D gesezt wurde, durch E ein Loth auf BC gezogen, sonst aber, wie gedacht, einerley Verfahren beobachtet werden.

Durch dieses Verfahren aber kann man die angegebene Figur nur in ein Rechteck verwandeln, aber nicht in ein Quadrat, weil man sonst auf diese Art müßte ein Parallelogramm verzeichnen können, daß zwo gegebene Seiten und den Winkel, den sie einschlieſſen, hätte.

Ein Rechteck läßt sich mittelst der mittleren Proportionallinie zwischen seinen Seiten in ein Quadrat verwandeln (wie die Folge zeigt); und folglich in so ferne, jede Figur.

15. Satz.

Bedingung.

In dem bey A rechtwinklichten Δ ABC (60 fig.) sey BC die Hypothenuse,

nuse, BM ihr Quadrat; BA der eine Cathetus und sein Quadrat NB; AC der andere Cathetus und HC sein Quadrat.

Behauptung.

$$BM = NB + HC.$$

Vorbereitung.

1) Man ziehe aus dem rechten Winkel A ein Perpendikel AG auf die Hypothenuse BC;
2) verlängere solches nach F;
so wird GF der Hypothenuse Quadrat BM in zwey Rechtecke BF, GM, theilen.
3) Man ziehe AD und
4) CR;
5) Desgleichen AM
6) und BC.

Kann nun bewiesen werden, daß das Rechteck BF, dem Quadrate BN; und das Rechteck GM dem Quadrate HC gleich ist; so ist der Satz dargethan; weil die Summe beyder Rechtecke dem Hypothenusenquadrat, gleich ist, und folglich alsdann diesem die Summe der beyden Cathetenquadrate gleich seyn muß.

Beweis.

Da

AF mit BD parallel

ist (1. Vorber. 11. S.) und △ BAD mit dem Rechtecke BF über eine Grundlinie BD und zwischen

schen einerley Parallele DF liegen, also beyde einerley Grundlinie und Höhe haben; so ist nach des 14. S. 3. Zusatze

$$1)\ \Delta\,BAD = \tfrac{1}{2}\,BF$$

und weil NA und AC wegen den rechten Winkeln BAN, BAC in gerader Linie liegen (8. S. 1. Z.) NC aber mit RB parallel ist (Bed. 11. S.) und das Δ RBC mit dem Quadrate NB über eine Grundlinie und zwischen einerley Parallelen RB; NC stehen, also einerley Grundlinie und Höhe haben; so ist

$$II)\ \Delta\,RBC = \tfrac{1}{2}\,NB \text{ (14. S. 3. Z.)}$$

Da nun

$$W.\ RBA = W.\ DBC \text{ (weil beyde} = R)$$
$$ABC = ABC$$

Also:

$$RBA + ABC = DBC + ABC$$

d. i.

$$W.\ RBC = W.\ ABD;$$

Aber

$$RB = AB$$
$$BD = BC$$

Folglich:

$$\Delta\,RBC = \Delta\,DBA \text{ (2. S.)}$$

Also

$$\tfrac{1}{2}\,NB = \tfrac{1}{2}\,BF \text{ (I, II)}$$

Mithin

$$III)\ NB = BF \text{ (Ar. I. Cap. 88. §.)}$$

Da ferner BA und AH wegen den rechten Winkeln BAC, CAH in gerader Linie HB liegen (8. S. 2. Z.)

2. Z.) und HB mit EC parallel ist, Δ BEC mit HC über eine Grundlinie und zwischen einerley Parallelen liegen, so ist vermöge 14. S. 1. Z.

V) $\Delta BCE = \frac{1}{2} HC$.

Eben so erhellet: daß

VI) $\Delta CAM = \frac{1}{2} GM$

Weil nun

W. ECA = BCM (denn beyde = R)
ACB = ACB

---

so ist

ECA + ACB = BCM + ACB

d. i.

W. BCE = W. ACM.

Ferner:

CE = CA (Bed.)
CB = CM (Bed.)

Folglich

Δ BCE = Δ ACM

Also

$\frac{1}{2} HC = \frac{1}{2} GM$ (IV. VI)

Mithin:

HC = GM

Aber

NB = BF (IV)

Folglich:

HC + NB = GM + BF
= BM

Dieser Lehrsatz heißt von seinem Erfinder der Pythagorische Lehrsatz, und wegen seines gros-

sen

sen Nutzens in der ganzen Meßkunst auch: Magister matheseos. Vitruv erzählt in dem II. Cap. des IX. Buchs seiner Baukunst, daß Pythagoras den Musen habe dieses vortreflichen Satzes wegen ein Opfer gebracht. Sein Beweis hier ist der im Euklides. Man hat noch andere von diesem Satze, wovon man auf 23 in einer von Herrn Prof. Johann Joachim Langen zu Halle 1752 gehaltenen Disputation gesammlet findet. —

Es ist leicht, sich über jeder Linie ein Quadrat vorzustellen: daher braucht man nicht allemal die Quadrate in den Figuren zu zeichnen; Um aber doch das Quadrat einer Linie anzugeben, kann man sich folgender Verkürzung bedienen: Man setze nämlich an den die Linie bezeichnenden Buchstaben, rechter Hand ein q, auf diese Art: ABq. Nach dieser Bezeichnung wäre also in der 60. fig. der Linie BC Quadrat BM = BCq; NB = ABq; HC = ACq; und man kann nun HC + NB = BM so ausdrücken ACq + ABq = BCq.

Hieraus folgt:

$$BCq - ACq = ABq$$

Oder: in jedem rechtwinklichen Δ ist das Quadrat eines jeden Catheten gleich der Differenz des Quadrats des andern Catheten und des Quadrats der Hypothenuse.

15. Satz. 1. Zus.

Hieraus kann man leicht erweisen, daß: wenn in einem Δ ADC (61. fig.) CDq < oder > ADq + ACq,

+ ACq, im ersten Falle der Winkel CAD < im 2ten aber > R seyn muß.

15. S. 2. Zus.

Aus den gegebenen Seiten (D, E) [fig. XXII.] zweyer Quadrate die Seite eines Quadrats zu finden, welches entweder I) der Summe oder II) der Differenz der vorigen Quadrate, gleich ist.

Auflösung.

Für I.

1) Man verzeichne einen R bey A;
2) mache AB = D und
3) AC = E;
4) ziehe BC;

so hat man das Verlangte:

Denn BCq = ABq + ACq = Dq + Eq. (15. S.)

Für II.

1) Man nehme AC = der kleinern Seite E;
2) richte durch ihren Endpunct A ein unbestimmtes Perpendikel AB,
3) Beschreibe aus C mit der andern gegebenen Seite D = CB einen Kreis, der AB in B schneidet;

so ist AB die verlangte Seite:

Denn ABq = BCq — ACq = Dq — Eq. (15. S. u. d. Erl.)

16. Satz.

Bedingung.

1) AB sey eine Linie die einen Kreis

wie

wie 62. Figur, in zween Puncten A, B schneidet;

2) C dieses Kreises Mittelpunct;

3) D ein Punkt in AB der zwischen A und B fällt, und CD seine Entfernung von C;

4) E auch ein Punct in AB, der aber ausserhalb A oder B fällt, und CE seine Entfernung von C.

Behauptung.

I) D liegt näher beym Mittelpunct C als der Halbmesser des Kreises beträgt, oder welches eben das ist: CD < als der Halbmesser.

II) E liegt weiter von C als der Halbmesser beträgt; oder: CE > Halbmesser.

Vorbereitung.

Man ziehe nach A und B die Halbmesser CA, CB.

Beweis.

Für I) Beh.

Da

CA = CB (Vorb. 12. Erkl.)

so ist das △ ABC gleichschenklicht, und daher:

W. CAB = W. CBA (2. S. 3. Z.)

Aber

CDB ▷ CAB (9. S.)

Also auch:

CDB ▷ CBA (Ar. I. Cap. 87. §.)

Folglich steht in dem △ CDB, die Linie CD dem kleinern Winkel und CB dem größern, gegenüber; Also

CD ◁ CB (9. S. 6. Z.)

Für II. Behaupt.

Im △ BCE ist

der W. CBE ▷ CEB (9. S.)

Aber:

CAB = CBE (2. S. 3. Z.)

Folglich

W. CAB ▷ CEB,

und CE steht im △ CAE dem größern Winkel, so wie CA dem kleinern gegen über; Also ist

CE ▷ CA

oder

▷ CB

16. Satz. Zusatz.

Eine gerade . . . . . zween Puncte;]

I. Wenn eine gerade Linie AB einen Kreis **schneidet**; so geschiehet dieß in nicht wenigern als zween Puncten A. B; (8. Grundſ. Zuſ.) Aber AB kann auch den Kreis nicht in mehreren Puncten schneiden: denn schnitte sie ihn noch in einem dritten E, so müßte er wie A und B um den Halbmesser vom Mittelpunct C entfernet seyn; Aber

jeder

jeder anderer Punct als A und B ist näher bey C oder weiter davon als der Halbmesser beträgt (16. S.); Folglich kann E kein dritter Durchschnittspunct des Kreises und der geraden Linie AB seyn. Giebt es aber keinen dritten: so giebt es auch nicht mehrere.

oder sie berührt ..... ihm]

II. Wenn die Linie AB den Kreis nicht schneidet; so berührt sie ihn oder nicht. Thut sie das erste; so hat sie mit dem Kreise nur einen Punct gemein, oder, welches einerley ist: berührt ihn nur in einem Puncte, und ist also eine Tangente: (12. Erkl.) Denn hätte sie mit dem Kreise zween Puncte gemein; so schnitte sie ihn (I) und wäre daher keine Tangente (12. Erkl.)

III. Wenn eine Linie weder den Kreis schneidet noch berührt; so muß sie gar keinen Punct mit ihm gemein haben: Folglich gar nicht an seinen Umfang treffen (II), und alle ihre Puncte müssen weiter vom Mittelpunct des Kreises entfernt seyn, als sein Halbmesser beträgt: Also ausser dem Kreise liegen. (16. S.)

17. Satz.

1 Bedingung.

In einem Kreise wie XXIII Figur, sey

1) E der Mittelpunct;

2) AB eine Sehne;

3) EF ein Perpendikel aus E auf AB.

1. Behauptung.

EF halbirt AB.

2 Bedingung.

4) EF eine aus dem Mittelpunct E durch die Mitte F der Sehne AB gezogene Linie, daß also AF = FB = $\frac{1}{2}$ AB.

II. Behauptung.

EF steht auf AB senkrecht.

3 Bedingung.

5) EF ein Loth durch das Mittel F einer Sehne AB.

III. Behauptung.

EF geht durch den Mittelpunct E.

Vorbereitung.

Man ziehe nach A und B die Halbmesser EA, EB; so ist AEB ein gleichschenklichtes Dreyeck (15. Erkl. 12. Erkl.) wo der Mittelpunct E der Scheitel und die Sehne AB die Grundlinie.

Beweis.

Für I.

Da EF ein Loth aus E auf AB ist, (1. Bed. 3)) so ist, vermöge Vorbereitung und 9. Satzes 5. Zusatzes Erläuterung und, daselbst II. Behauptung,

AF

$$AF = FB.$$
$$= \tfrac{1}{2} AB.$$

Für II.

Weil EF durch E und der AB Mittel F geht, (2. Bed. 4)) so steht sie auf AB senkrecht. (Vorber. 9. S. 5. Z. u. d. Erl. daſ. 1. Beh.)

Für III.

Da EF ein Loth aus dem Mittel der AB ist; (3. Bed. 5)) so geht EF durch E. (Vorber.; 9. S. 5. Z. u. d. Erl. daſ. III. Behaupt.)

17. Satz. 1. Zusatz.

Durch drey nicht in gerader Linie liegende Puncte (A, B, C; XXIV. fig.) einen Kreis zu beschreiben.

Man sieht daß dieß, wenn man sich durch A, B, C, Linien AB, BC gezogen vorstellt, völlig mit dem übereinkommt:

Es sind zwo einander in einem Punct (B) schneidende Sehnen (AB, BC) gegeben: Man soll den ihnen zugehörigen Kreis beschreiben.

Gegeben

Die Sehnen AB, BC die in B zusammen stossen.

Gesucht

den ihnen zugehörigen Kreis.

Auflösung.

1) Man halbire die gegebenen Sehnen BA, BC in T und V;

2) und ziehe durch T und V die Perpendikel MN, PQ, welche einander irgendwo, in O, schneiden werden;

So ist O der Mittelpunct des verlangten Kreises; und wenn man aus O mit dem Halbmesser OA den Kreis beschreibet, so gehet er nicht nur durch A, sondern auch durch B, und C.

Beweis.

Weil AB, BC Sehnen sind, und nach dem 17. Satz jedes Loth MN, PQ durch der Sehnen AB, BC Mitte, durch ihres Kreises Mittelpunct geht; so muß er in jedem Lothe liegen; Schneiden sich nun die Perpendikel MN, PQ; so muß ihr Durchschnittspunct der Mittelpunct des verlangten Kreises seyn. Zieht man noch OB, und OC; so ist

weil

W. OVP = OVC (2. Aufl.)
BV = CV (1. Aufl.)
OV = OV

Δ OVB = Δ OVC (2. S.)

Also

OB = OC;

Eben so ist auch

OB = OA;

Folglich

OA = OB = OC;

Mithin müssen B und C sowohl als A in dem mit OA beschriebene Kreise liegen.

Daß

Daß aber, wenn A, B, C oder AB, BC nicht in gerader Linie liegen, die Lothe MN, PQ sie mögen nun durch der Linien AB, BC Mitte gezogen seyn oder nicht, einander schneiden müssen, erhellet so:

Ein von V auf AB gefälltes Loth VW ist vermöge des 11ten Satzes mit MN gleichlaufend. Liegt nun AB mit BC nicht in einer geraden Linie, aber PQ wäre mit MN gleichlaufend, so muß PQ irgendwo, in P, auf die Linie AB oder deren Verlängerung, senkrecht treffen (12. S.) also BP auf PQ in P senkrecht stehen. Dies kann aber nicht seyn: denn da schon BV auf QP senkrecht ist, (Bed.) so kann, vermöge des 9. Satzes 4. Zusatzes auch nicht BP seyn; Also kann auch nicht VW und zugleich VP auf AB oder deren Verlängerung senkrecht stehen: Folglich muß QP von dem Loth VW unterschieden: Also nicht mit MN, wie VW, gleichlaufend seyn.

17. S. 3. Zus.

Nämlich ..... Kreis]

Weil vermöge 16. S. Zus. eine gerade Linie mit dem Kreise nur 2 Puncte gemein hat.

17. Satz. 4. Zusatz.

und also ..... schneiden.]

Denn hätten beyde Kreise noch einen Punct auser den beyden gemein, so würden beyde Kreise, durch die 3 Puncte auf einerley Art bestimmt, auf einander fallen, und also einander nicht schneiden.

18. Satz.

I) Bedingung

Im Kreise der 65 Figur sey

1) E der Mittelpunct,

2) NM, FG zwo Sehnen,

3) EO der Sehne NM und EH der der Sehne FG Entfernung von E,

4) Aber EO = FH.

I) Behauptung.

die Sehne FG = der Sehne NM.

II) Bedingung.

5) I Bed. 1) 2) 3)

6) die Sehne NM = der Sehne FG

II) Behauptung

die Entf. EO = der Entf. EH

III) Bedingung.

7) I Bed. 1) 2) 3)

8) Entf. EO ▷ EH.

III) Behauptung.

NM ◁ FG

IV) Bedingung.

9) Bed. 1) 2) 3)

10) die Sehne NM < FG.

IV) Behauptung.

EO ▷ EH.

Beweis.

Da EO und EH der Sehnen NM, und FG Entfernungen von E sind, so sind sie nach des 9. Satzes 10. Zusatz und dessen Erläuterung Perpendikel aus E auf diese Sehnen; Folglich halbirt EO die Sehne NM in O, und EH die Sehne FG in H; daher ist

$$\alpha)\ MO = \tfrac{1}{2} MN;$$
$$\beta)\ FH = \tfrac{1}{2} FG$$

und da

$$\gamma)\ EM = EF \text{ (denn es sind Halbm.)}$$

so ist in den rechtwinklichten $\Delta\Delta$ EHF, EOM.

Für 1) Behaupt.

$FEq = EMq$ (15. S. 1. B.)
$EHq = EOq$ (1. Bed. 4.)

Also:

$$FEq - EHq = EMq - EOq$$

Aber

$FEq - EHq = FHq$
$EMq - EOq = OMq$ (15. S.)

Also

$$FHq = OMq \text{ (Ar. I. Cap. 87. §.)}$$

Folglich

$FH = OM$ (15. S. 1. B.)
$2 . FH = 2 . OM$ (Ar. I. C. 88. §.)

Also

$$FG = NM \text{ } (\alpha, \beta)$$

Für II) Behaupt.

FEq = EMq
FHq = OMq (II Bed. 6;) 15. S. 1. Z.)

Also

FEq — FHq = EMq — OMq

Folglich

EHq = EOq

Mithin

EH = EO.

Für III) Behaupt.

EMq = EFq (V, 15. S. 1. Z.)
EOq > EHq (III Bed. 8; 15. S. 1. Z.)

Also

EMq — EOq < EFq — EHq (Ar. I. C. 88. §.)

Folglich:

OMq < FHq

Mithin

OM < FH (15. S. 1. Z.)

Folglich:

NM < FG (α, β)

Für IV) Behaupt.

EMq = EFq
MOq < FHq (IV. Bed. 10))

Also

EMq — MOq > EFq — EHq

Mithin

EOq > EHq

Folg-

Folglich:

EO > EH

19. Satz.

Bedingung

In dem Kreise der 66. fig. sey
1) B der Mittelpunct,
2) BA der Halbmesser,
3) A dessen Endpunct,
4) FD ein Perpendikel durch A
5) AL eine andere Linie, (also kein Loth) durch A.

Behauptung.

I) FD hat mit dem Kreise nur den Punct A gemein, oder berührt den Kreis in A, und alle übrigen Puncte des Loths FD sind ausserhalb des Kreises.

II) AL schneidet den Kreis in zween Puncten, (A, M.)

I) Vorbereitung.

1) In dem Lothe FD nehme man ausser A nach Gefallen einen Punct F; und
2) ziehe BF;

So ist:

Beweis.

Für I)

in dem rechtwinklichten △ BAF
der W. BFA < BAF (9. S. 3. B.

Also

Also

$$BF > BA;$$

Folglich: da

$$BG = BA \text{ (13. Erkl.)}$$

---

auch

$$BF > BG \text{ (Ar. I. C. 87. §.)}$$

Folglich liegt F ausserhalb des Kreises, und also auch jeder anderer Punct in FD als A; (I) Vorb.)

II) Vorbereitung.

1) Aus B ziehe man auf AL das Loth BE (7. S.)
und
2) verlängere solches in I.

Beweis

Für II)

Weil durch A nur ein Loth FD gehen kann (9. S. 4. Z.) so muß AL mit BA schiefe Winkel machen, und es ist in dem rechtwinklichten $\triangle BEA$ der

$$\text{Winkel } BAE < \text{W. } BEA \text{ (9. S. 3. Z.)}$$

Also:

$$BE < BA$$

Folglich: da

$$BA = BI \text{ (13. Erkl.)}$$

---

auch

$$BE < BI$$

Folglich ist ein Punct E von AL innerhalb des Kreises, und AL schneidet den Kreis noch einmal

mal (8. Grundſ. Zuſ.) aber nicht mehreremal: denn es ſey

EM = EA; (13. Erkl.)

und BM *) gezogen;

Weil nun

BE = BE (Ar. I. C. 87. §.)
W. BEM = BEA (5. Grundſ.)

ſo iſt:

Δ EBM = Δ ABE (2. S.)

Folglich:

BM = BA

Nun liegt dieſes Halbmeſſers BM Endpunct M in dem Umkreis um B (13. Erkl.) und auch zugleich in AL (Bed.): Folglich iſt M der 2te Durchſchnittspunct.

Auſſer dieſem und A giebt es keinen; weil, vermöge 16. S. Zuſatz eine Linie den Kreis nur in zween Puncten ſchneidet, daß alſo das Stück AEM der Linie AL ganz innerhalb des Kreiſes fält.

19. S. 2. Zuſatz.

Durch . . . . . Tangente.]

Weil jeder Punct A im Umkreiſe der Endpunct des vom Mittelpunct dahin gezogenen Halbmeſſers iſt, und durch ein A nur ein Perpendikel geht, (9. S. 4. Z.) welches eine Tangente iſt. (19. S. 1. Z.)

und

*) In der 66. fig. muß man ſich dieſe Linie von B nach M ziehen, oder gezogen denken.

und ..... senkrecht]

Eben weil sie ein Perpendikel durch des Halbmessers Endpunct, als den Berührungspunct, ist. (19. S. 1. Z.)

19. Satz. 3. Zusatz.

Denn ein Perpendikel, durch den Berührungspunct A der Tangente FD ist der Halbmesser, CA; weil beyde am Berührungspuncte auf einander senkrecht stehen. (19. Satz. 2. Zusatz.) Aber dieß Loth ist auch keine vom Halbmesser verschiedene Linie, weil durch einen Punct A, nur eine Linie auf FD senkrecht steht. (9. S. 4. Z.) Also ein Perpendikel ꝛc. (S. Buch.)

19. Satz. 4. Zusatz.

Sehnen ..... rückten.]

Wie fig. XXIV. ab, cd, ef, gh; weil sie sich von B immer weiter und weiter entfernen, und nach A rücken; die von B entfernteren Sehnen aber allemal kleiner sind als die von B weniger entfernten. (18. S. III.)

19. Satz. 5. Zusatz.

Aus einem gegebenen Puncte K (67. fig.) an einen gegebenen Kreis mAMm eine Tangente zu ziehen.

Dieß zu bewerkstelligen verfahre man so:

Da man eine Linie zu finden hat, die durch K so gehen soll, daß sie den gegebenen Kreis berührt; so ziehe man auf eine mechanische Art durch K an

den

den Kreis eine Tangente KM, und nehme an: KM sey die zu suchende Tangente; folglich M der Punct wo KM den Kreis berührt.

Wenn man also M zu finden weiß; so hat man der Aufgabe ein Gnüge gethan.

Nun ist aus des 19. S. 2. Zusatz, daß wenn man an M den Halbmesser BM zieht, der Winkel KMB, (da LM eine Tangente seyn soll,) = R seyn muß.

Diese Eigenschaft der Tangente allein, führt uns noch nicht zu unseren Zweck, da der Punct M nur angenommen ist, und jeder Halbmesser ein M geben kann. Man sieht aber doch schon so viel, daß wenn man einen Punct D bestimmen kann, der mit B und M in gerader Linie liegt, M alsdenn gleich gefunden werden könne.

In dieser Absicht muß man mittelst vorhergehenden Sätzen Linien zu ziehen suchen, aus deren Verhalten gegen einander sich D bestimmen läßt.

Wenn man daher aus dem Mittelpunct B nach dem gegebenen Punct K die gerade Linie BK, ziehet, so wird diese den Kreis in A schneiden. Nun kann man vermöge des 1. Zusatzes an A eine Tangente dD ziehen, diese wird BM verlängert in D schneiden, nnd dieser Durchschnittspunct D muß der Punct seyn, der mit M und B in gerader Linie liegt.

Wüßte man nun die Größe von AD oder BD, so hätte man D völlig.

Um

Um eine von beyden Linien zu bestimmen, betrachte man die Dreyecke ABD, BMK, und man wird finden, daß beyde den Winkel bey B gemein haben, also in beyden der

W. KBD = KBD

Ferner:

W. BAD = BMK (denn beyde sind = R
weil KM und AD Tangenten.)

BA = BM (12. Erkl.)

Also

△ BAD = △ BMK (3. S.)

Folglich

BD = BK

d. i. = der Entfernung des gegebenen Puncts K von dem Mittelpuncte B des gegebenen Kreises.

Hieraus läßt sich nun die Auflösung unserer Aufgabe herleiten, wie folget:

1) Den gegebenen Punct K und den Mittelpunct B ziehe man mit einer geraden Linie KB zusammen;

Diese schneidet den Kreis in A;

2) An A ziehe man eine Tangente dD (19. S. 1. B.)

3) und beschreibe aus B mit BK einen Kreis, welcher die Tangente dD in d und D schneiden wird;

4) Ziehe hierauf durch B und D die Linie BD;

Diese schneidet den Kreis in M, dem Puncte, der der gesuchte Berührungspunct seyn wird;

Man

Man darf nun also

5) KM ziehen, so die gesuchte Tangente ist.

Da der Kreis in 3) die Tangente Dd in D und d schneidet; so kann man auch Bd ziehen, und denn also von K nach m, wo Bd im Kreisse einschneidet, eine 2te Tangente Km.

Eben das erhält man, wenn man D schon weiß, und Ad = AD nimmt.

Dergleichen Verfahren, wie das, wodurch wir auf diese Auflösung gekommen sind, wird in der Analysis beobachtet. (Vorer. 9.)

In derselben kann man entweder mit den Größen, wie mit Zahlen umgehen, und mittelst Gleichungen, (die uns eben die Analysis finden lehrt) das Gesuchte herausbringen; [Wie aber dasselbe aus der gefundenen Gleichung herausgebracht werden kann, lehrt die Algebra (Vor. 9)]: Oder alles durch Zeichnung verrichten, dabey die geometrischen Größen als geometrische Größen behandeln, und die Figur nie aus den Augen lassen.

Dieß geschiehet in der geometrischen Analysis, so wie jenes in der algebraischen.

Von der geometrischen Analysis, wovon voriges Verfahren ein Beyspiel ist, haben uns die Alten vorzüglich Muster hinterlassen.

Euklids Data, eine Sammlung von Sätzen, die zeigen, welche Dinge sich aus gewissen gegebenen Dingeu finden oder erkennen lassen, sind das erste der von den alten Geometern zum Behuf der analytischen Methode geschriebenen Bücher.

Diese Data finden sich nicht in allen Ausgaben des Euklids. Die beste Ausgabe die wir von den Datis haben, ist von den großen Schottischen Mathematiker, Robert Simson, welche Herr Professor Schwab in Stuttgard ins Deutsche übersezt, und als eine Einleitung, Gedanken über die Analysis, auch als einen zweyten Theil, Sammlung geometrischer nach der geometrisch-analytischen Methode aufgelößte Aufgaben beygefügt hat.

19. Satz. 6. Zusatz.

nämlich LAB . . . . . und AD]

LAB nähert sich dem rechten Winkel immer mehr, je näher M nach A rückt; LAB wird also dadurch immer größer und LAD immer kleiner, und so lange M noch nicht in A, also MA noch nicht auf AD liegt, (obgleich M dem Punct A unendlich nahe liegt,) so lange fällt der Bogen AIM zwischen LA und AD.

20. Satz. 1. Zusatz.

Kreise . . . . . Mittelpunct.]

Denn hätten sie einerley Mittelpunct und verschiedene Halbmesser, so wären sie concentrische Kreise und hätten gar keinen Punct gemein. (20. S.). Folglich schnitten sie einander nicht: eben dieß geschähe nicht, wenn sie bey einerley Mittelpunct noch einerley Halbmesser hätten: denn da wären sie gleich groß (12. Erkl.) und deckten einander.

... geht ..... Mittelpuncte]

Denn ein Perpendikel durch das Mittel einer Sehne geht durch ihres Kreises Mittelpunct (17. S; III); Nun ist aber die Sehne LM beyden Kreisen, dem um P sowohl als A (27, 69. fig.) gemein: Folglich geht das durch ihre Mitte laufende Loth AP durch beyder Kreise Mittelpuncte A, P.

... die leztere ..... fallen.]

Da LI (69. fig.) des Kreises um P Tangente, an den einen Durchschnittspunct beyder Kreise (um A und P) ist; so ist der

W. PLI = R (19. S. 2. Z.)
HLP > R, also stumpf
PLO < R, also spizig.

Folglich muß, da PLI < PLH und > PLO, den Schenkel PL aber alle diese izt genannten 3 Winkel gemein haben, LI zwischen LH und LM fallen.

... und ihres ..... und LM.]

Weil LI mit dem Bogen LNM nur den Punct L gemein hat, und alle ihre andere Puncte ausserhalb LNM fallen; Auch LM und dem Bogen LNM ausser M gleichfalls der Punct L gemeinschaftlich ist, sonst aber ganz innerhalb des Kreises fällt: (19. S.) Also muß der Bogen LNM bey L zwischen LI und LM fallen; folglich zwischen ꝛc. (S. Buch.)

... weil LKM ..... fällt. (19. S.)]

Da LH des Kreises um A Tangente an L ist;

so hat LH mit diesem Kreis nur L gemein, und alle andere Puncte von LH liegen ausserhalb dieses Kreises; (19. S.) Nun ist aber LI eine andere Linie durch A, die folglich verm. des 19. Satzes, gedachten Kreis in L und I schneidet, also ganz innerhalb demselben fällt, und folglich auch alle Puncte ausser L und I: Mithin muß der Bogen LKM zwischen LH und LI fallen.

Und also . . . . . Bogen LKM.]

Da die beyden Kreise um A und P einander nur in zween Puncten L, M schneiden (17. S. 4. Z.); der Bogen LNM aber (verm. des gleich vorhergehenden) so wohl bey L als M zwischen dem Bogen LKM und der gemeinschaftlichen Sehne fällt: so muß er ganz dazwischen fallen.

Nun ist PL > AL]

Weil LO ein Perpendikel auf Kn, und PL weiter von LO, als LA, entfernt ist. (9. S. 12. Z.)

. . . von den Bogen]

Wie LKM, KNM.

erhebt sich des größten Kreises ꝛc.]

In der Figur ist der größte Kreis der um P, weil PL > AL, und dieses Kreises Bogen LNM erhebt sich am wenigstens über die Sehne LM.

20. S. 3. Zusatz.

Um den . . . . . Durchschnitt.]

Bedingung.

F (fig. XXVII) sey ein Mittelpunct,

um

um den mit einem Halbmesser FG, ein Kreis beschrieben, dessen Durchmesser = PG = 2 . FG;

Q sey ein anderer ausserhalb FG nach Gefallen genommener Punct, und aus diesem als einem Mittelpuncte mit QG (wo G ein Punct in der Peripherie des Kreises um F;) ein Kreis verzeichnet.

Behauptung.

Der Kreis um Q schneidet den um F noch in einem andern Punct (g) als in G.

Vorbereitung.

Man ziehe FQ und lege darunter in Gedanken ein Δ FQ g das Q g = QG; F g = FG hat, welches offenbar wie im 4. Satze angeht:

So ist

Beweis.

Der Punct g in einem um Q mit QG beschriebenen Kreise, weil Q g = QG (Vorber.) = dem Halbmesser, und auch in einem um F mit FG verzeichneten Kreise, weil Fg = FG = dieses Kreises Halbmesser:

Also liegt g in beyden Kreisen.

Folglich ist er ihr zweyter Durchschnitt, so wie G ihr erster.

Sollen ..... Linie liegen.]
Wenn Kreise einander berühren, so müssen ihre Mittelpunete in einer geraden Linie mit dem Berührungspuncte liegen.

Bedingung.

Der Kreis um F (70. fig.) berühre den um f in G.

Behauptung.

So liegen F, f, und G in gerader Linie.

Beweis.

Denn legen sie nicht in gerader Linie, so müßte einer von diesen Mittelpuncten, z. E. f, ausserhalb der durch G und dem andern Mittelpunct F gehenden geraden Linie liegen. Aber alsdann wäre der Fall des ersten Theils dieses Zusatzes vorhanden, und die Kreise würden folglich einander schneiden, und ausser G noch einen Punct gemein haben; dieß kann aber nicht seyn, weil ihnen, vermöge der Bedingung, nur G gemeinschaftlich ist:

20. Satz. 4. Zusatz.

Wenn ..... verlangte thun.]
Diese Kreise aber können einander entweder I) von aussen, d. i. so berühren, daß der eine ganz ausserhalb dem andern fällt, wenn die Entfernung fF ihrer Mittelpuncte f, F, = der Summe ihrer Halbmesser, also = fG + FG (71. fig.) ist; oder II) von innen, d. h. so berühren, daß der eine ganz innerhalb des andern fällt, wenn die Entfernung

nung Ff (70. fig.) ihrer Mittelpuncte F, f, = der Differenz ihrer Halbmesser, = Gf — GF, ist.

Denn (fig. 70, 71.) ein Loth MN durch den Berührungspunct G auf die gerade durch f, F, G, gehende Linie GB berührt beyde Kreise in G. (19. S. 2. Z.)

Nun können die Mittelpuncte F, f so wohl auf verschiedenen Seiten von G oder der Tangente MN (wie 71. fig.) als auch auf einer Seite, (wie 70. fig.) liegen.

Im 1sten Falle haben die Kreise (fig. 71.) keinen Punct als G gemein, weil jeder Kreis ganz auf seiner Seite der Tangente MN liegt (19. S.) und beyde Kreise, MN in G berühren, so daß der eine auf die, der andere auf jene Seite von MN, also der eine ausserhalb dem andern fällt:

Folglich einander von aussen berühren.

Die Entfernung beyder Mittelpuncte aber, oder Ff = FG + fg, wie nach I) seyn soll.

Im 2ten Falle (70. fig.) sey

Gf > GF;

Nun sey K in dem Kreise um f, jeder andere beliebige Punct, und an ihn die Linien

fK, FK, GK;

gezogen;

so ist

fK = fG (12. Erkl.)

der

W. fKG = fGK (2. S. 3. Z.)

und, (weil F zwischen f und G fällt, also des Winkels FKG Schenkel FK zwischen den Schenkeln fK, GK inne liegt,)

der W. fKG ▷ FKG (Vor. 8. u. d. E.)

Also:

fGK ▷ FKG

Folglich in dem △ FGK,

FK ▷ FG.

Mithin ist K und folglich jeder andere Punct als G, ausserhalb des Kreises um F.

Und weil FP (wo P ein beliebiger Punct in der Peripherie des Kreises um F) = FG (12. Erkl.) folglich FP ◁ FK; so fällt der Kreis um F innerhalb des um f:

Folglich berühren beyde einander von innen;

Ihrer Mittelpuncte Entfernung Ff aber ist = fG — FG, wie II) verlangt.

20. Satz. 5. Zusatz.

Zweene . . . . . liegen.]

Zweene Kreise, wie fig. 69, die durch einen Punct L gehen, aber daselbst nicht einerley Tangente, (also daselbst verschiedene wie LH, LI) haben, schneiden einander ausser L noch in einem andern Punct, in M.

Dieß erhellet aus dieses 20. Satzes 3. Zusatz:

Denn der Mittelpunct A, des Kreises LKMkL liegt in dem Lothe LA, das auf dieses Kreises Tangente

gente LH durch L gezogen ist, und der Mittelpunct P des Kreises LNMnL liegt gleichfalls in dem durch L auf seine Tangente LI gezogenen Perpendikel LP; diese Perpendikel aber, müssen vermöge 9. Satzes 4. Zus. verschieden seyn:

Also können nicht beyde Mittelpuncte A, P mit dem gemeinschaftlichen Puncte L in einer geraden liegen: Folglich einander nicht berühren: Also schneiden, und mithin ausser L noch einen Punct, M, gemein haben.

20. Satz. 6. Zusatz.

Wenn an dem Kreis um F (fig. XXVIII.) die Tangente MN gezogen ist, und durch G, den Punct wo sie den Kreis berührt, auf MN die Linie GP senkrecht steht, so geht sie durch F.

Nimmt man nun auf GP einen Punct f weiter als F von G, und beschreibt aus f mit fG einen Kreis; so wird dieser zwischen dem Kreis um F und der gemeinschaftlichen Tangente MN hingehen. Nimmt man ferner GC > Gf, und beschreibt aus C mit GC gleichfalls einen Kreis, so wird dieser zwischen dem Kreis um f und der Tangente MN, seinen Weg nehmen (20. S. 4. Z.)

Auf diese Art kann man zwischen dem Kreis um F und der Tangente MN unnndlich viele Kreise die den Punct gemein haben, gehen lassen, weil man auf GP (deren Größe unbestimmt ist) unendlich viele Mittelpuncte, wovon immer einer weiter als der andere von G entfernet ist, nehmen

Der Winkel SGN, den der Bogen SG mit der Tangente GN bey G, oder, welches einerley, der Kreis um F mit seiner Tangente MN, macht, heißt der **Berührungswinkel** (angulus contactus).

Er wird also immer kleiner und kleiner werden, je mehr man zwischen den Kreis um F, und seiner Tangente MN, durch G, Kreise zieht, also je grösser man den Halbmesser nimmt.

Hieraus hat man mit dem **Euklides** folgende zweene Sätze:

I) **Jeder Berührungswinkel** CSGN **ist kleiner als jeder geradlinichte Winkel** (dGN).

Denn so klein auch der Winkel dGN ist, so schneidet doch die Linie dG den Kreis in zween Puncten G und S, daß also das Stück gerade Linien GS innerhalb den Kreis, und folglich der Bogen GS, zwischen Gd und GN, fällt. (19. S.)

Der Winkel FGS, den der Bogen SG mit dem Halbmesser FG macht, heißt der **Winkel des Halbkreises.**

II) **Dieser ist gröſser als jeder geradlinichter spitzige Winkel** (FGd) **und kleiner als jeder geradlinichte stumpfe Winkel.**

Denn so klein auch dGN ist, so fällt doch die gerade Linie Gd allemal so, daß ein Stück von ihr, GS, innerhalb des Kreises GSπG fällt (19. S. und folglich der Bogen GS allemal zwischen Gd und GN.

Wenn

Wenn mGF ein stumpfer Winkel, und dem rechten Winkel so nahe als man will, so fällt die Tangente allemal zwischen mG und dem Bogen GS, weil sonst mG entweder auf GN oder zwischen GN und GF fallen, und im ersten Falle der Winkel mGF = R im 2ten aber < R seyn müßte, welches nicht seyn kann. Also ist mGF allemal grösser als der Halbkreis Winkel SGF.

Ueber den Berührungs= und Halbkreiswinkel ist im vorigen Jahrhundert zwischen dem berühmten Jesuiten **Clavius** und dem französischen Mathematiker **Peletarius**, ein Streit entstanden, worüber man **Wallisius** in der im Buche angeführten Stelle nachlesen kann.

Peletarius sagte: Wenn der Berührungswinkel kleiner als jeder spitziger ist; so ist er Nichts und folglich der Halbkreiswinkel = R.

Wäre aber jener würklich Nichts, so wäre unbegreiflich, wie er größer und kleiner gemacht werden könnte, welches doch geschehen kann, wie aus dem nächst vorhergehenden erhellet. Er muß also, da er einer Vermehr= und Verminderung unterworfen ist, eine Größe haben, folglich Etwas seyn.

Der damals lebende Jesuite und Professor zu Antwerpen, Taquet, wollte in seinen Elem. Geom. Lib. III. prop. 16 den anscheinenden Widerspruch obiger zween Sätze heben: Allein er fiel selbst auf die größte Absurdität; er sprach allen Winkel die Größe ab.

Daß diese zween Sätze richtig sind, ist ausser allen Zweifel. Indessen kann man allen Misverstand vorkommen, wenn man folgendes überlegt:

Aus der Entstehung des Kreises ist klar, daß der Punct der den Kreis beschreibt, alle Augenblicke seinen Weg ändert, folglich der Umkreis in jedem Puncte gegen eine gerade Linie eine andere Lage hat, da hingegen eine gerade Linie gegen eine andere immer eine und dieselbe Lage behält. (6. Erkl.)

Wenn also der Punct, der den Kreis um F beschreibt in G anlangt, so hat er in diesem Augenblick die Richtung die er hätte, wenn er die gerade Linie GN beschriebe, aber so bald er die Stelle G verläßt, so bald ändert er auch seine Richtung.

Also hat der Bogen nur in dem Punct G mit der Tangente GN einerley Lage, oder, welches eben das ist, er macht daselbst mit GN gar keinen Winkel: Folglich muß er in dieser Stelle G, seinen Durchmesser $G\pi$ unter einen eben so großen Winkel schneiden, als der ist, unter dem die Tangente GN mit dem Durchmesser zusammen stößt; Dieß leztere geschiehet aber unter einen rechten Winkel (19. S. 2. Zus.): Also muß der Bogen GS seinen Durchmesser unter einen rechten Winkel schneiden.

(S. **Karstens Lehrbegriff der Mathem. I. Th.** 131, 132, 133. §. der Geom.)

Ein rechter Winkel aber ist kleiner als jeder stumpfer, und größer als jeder spitziger; und dieß stimmt mit dem II. Satze überein.

20. Satz. 7. Zusatz.

Der ..... kleinere.]

Weil der größere Kreis mit der Tangente kleinere Winkel macht. (vor. Zus.)

21. Satz.

Der Winkel BDC den zween Halbmesser (BD, DC [fig. 72.]) eines Kreises an seinem Mittelpunct machen, heißt der **Mittelpunctswinkel, Centriwinkel** (angulus centri); Der Winkel BAC aber den zwo Sehnen BA, AC einschliessen, so daß sein Scheitel A in der Peripherie liegt, der **Peripheriewinkel, Umkreiswinkel** (angulus ad peripheriam).

Der Mittelpunctswinkel ist noch einmal so groß, als der Peripheriewinkel, der mit ihm auf gleichen Bogen steht.

Bedingung.

BDC (fig. 72, 73, 74) sey der Mittelpunctswinkel, und BAC der Peripheriewinkel, der mit BDC auf den Bogen BC stehet.

Behauptung.

$$BDC = 2 . BAC.$$

Beweis.

Hier hat man folgende 3 Fälle zu unterscheiden.

Es kann

1) ein Schenkel BA des Peripheriewinkels BAC durch den Mittelpunct D gehen (wie fig. 72.);

2) D,

2) D, innerhalb (fig. 74.) und

3) D ausserhalb (fig. 73.) des Winkels BAC fallen.

Für 1)

ist

$$BDC = A + C \text{ (13. S. 1. B.)}$$
$$A = C \text{ (weil DA und DC Halbmesser; und 2. S. 3. B.)}$$

Folglich:

$$BDC = A + A = 2\ A.$$

Für 2)

sey AE der Durchmesser; so ist der

$$W.\ EDC = DAC + C \text{ (13. S. 1. B.)}$$
$$DAC = C \text{ (12. Erkl. 2. S. 3. B.)}$$

Also

$$EDC = 2 . DAC$$

Eben so der

$$W.\ EDB = 2 . DAB$$

Folglich

$$EDC + EDB = 2 . (DAC + DAB)$$

d. i.

$$BDC = 2 . BAC.$$

Für 3)

sey AE (73. fig.) der Durchmesser, so ist der

$$W.\ EDC = DAC + C \text{ (13. S. 1. B.)}$$
$$DAC = C \text{ (12. Erkl. 2. S. 3. B.)}$$

Folglich:

$$EDC = 2 . DAC$$

Eben

Eben so der

W. EDB = 2 . DAB

Also:

EDC — EDB = 2 (DAC — DAB)

d. i.

BDC = 2 . BAC.

21. Satz. 1. Zus.

Der Winkel KPL im Halbkreise (fig. XXIX.) ist ein rechter.

Denn man ziehe den Durchmesser PG, so ist der Winkel

GPL = $\frac{1}{2}$ GFL (21. S.)
GPK = $\frac{1}{2}$ GFK

Also:

GPL + GPK = $\frac{1}{2}$ (GFL + GFK)

Nun ist

GPL + GPK = KPL
GFL + GFK = 2 R (8. S.)

Also:

KPL = $\frac{1}{2}$ (2. R)

d. i.

= R.

21. Satz. 2. Zusatz.

... im kleinern Abschnitte]
Wie MPLM der XXIX. fig.

..... im großen.]
Wie NKMPLN dieser Figur.

21. Satz. 3. Zusatz.

Winkel, BDA, BEA, an verschiedenen Puncten, D, E, (fig. XXX.) eines Abschnitts BDEAB, sind gleich:

Denn sie sind Peripheriewinkel, die mit dem Centriwinkel BCA auf einerley Bogen stehen: Es ist folglich jeder $= \frac{1}{2}$ BCA (21. S.). Also alle einander gleich.

Hierauf beruhet das Instrument des Herrn von Schönberg, wodurch man leicht große Kreisbogen, deren Mittelpuncte ausserhalb des Pappieres fallen, (deren Halbmesser z. E. 20 Ellen ꝛc. ist,) ziehen kann.

Die Beschreibung davon findet sich in den Commentation. Societ. Reg. Scient. antiquior. Tom. I. pag. 44 etc.

22. Satz.

I) Wenn in einem Kreise die Winkel am Mittelpuncte gleich sind, so sind die Bogen zwischen ihren Schenkeln gleich;

Umgekehrt:

II) Wenn die Bogen gleich sind, sind auch die Winkel gleich.

Für I)

Bedingung.

In dem Kreise der 65. Figur seyen NEM, FEM, FEG, Mittelpunctswinkel, und NEM = FEG, überdieß

dieß NLM der Bogen zwischen des Winkels NEM, und FIG der Bogen zwischen des Winkels FEG, Schenkeln.

Behauptung.

Bogen NLM = Bogen FIG.

Vorbereitung.

1) Man ziehe die Durchmesser FM, GN, und

2) durch deren Endpunct die Sehnen NM, FG, welche einander gleich seyn werden, (weil EM = EF; EN = EG, und Winkel NEM = W. FEG; also △ NEM = △ FEG;) [2. S.]

3) Man lege ꝛc. (S. Buch bis: fällt.)

Beweis.

So muß jeder ꝛc. (S. Buch.)

Für II)

Bedingung.

Es sey der Bogen NLM = dem Bogen FIG.

Behauptung.

der Winkel NEM = W. FEG.

Beweis.

Wenn man darthun kann, daß bey gleichen Bogen NLM, FIG, die Sehnen NM, FG, gleich sind, so folgt alsdann aus dem 4. Satze, daß auch der W. NEM = FEG.

In dieser Absicht setze man, daß der Bogen NLM = dem Bogen GIF, aber jenes Bogens Sehne NM nicht = dieses Bogens Sehne FG, sey.

Nun mache man folgende

Vorbereitung.

1) Man ziehe (fig. XXXI.) aus N die Sehne NQ = der Sehne GF.

Dieß geschiehet wenn man aus N mit dem Halbmesser FG einen Kreis beschreibet. Dieser muß den vorgegebenen Kreis um E, nothwendig schneiden. Ist nun Q einer von den Durchschnittspuncten: so muß NQ = GF seyn.

Denn Q liegt nicht nur in der Kreislinie um E, sondern auch in der um Q; Folglich von N um den Halbmesser GF entfernet.

2) Da also NQ = FG; so lege man in Gedanken NQ dergestalt auf FG, daß Q auf G und N auf F fällt;

So müssen diese beyden Sehnen und auch ihre Bogen NLQ, GIF, weil sie zu einerley Umkreis gehören, und daher alle Puncte dieser Bogen, gleichweit vom Mittelpuncte abstehen, einander decken, es mag übrigens der Bogen NLQ größer, (wie in der XXXII. Figur, indem Q zwischen M und G fällt,) oder kleiner, (wie in der XXXI. Figur, wo Q oberhalb M, zwischen L, und M, liegt,) seyn.

Nun

Nun gehört der Bogen QM (XXXI, XXXII. fig.) mit dem Bogen NLQ zu einerley Kreislinie um E.

Wenn daher der Bogen NLQ (fig. XXXII.) größer als der Bogen FIG, also der Bogen NLM (weil NLM = FIG angenommen) kleiner als NLQ, so muß M, da Q auf G liegt (2) Vorb.) unter G, in m, fallen, und also der Bogen NLM den Bogen Flm, (einen Theil des Bogens FIG) mithin MQ den Bogen mG (den andern Theil des Bogens FIG) decken.

Ist aber NLQ kleiner (wie fig. XXXI.) als FIG, also auch kleiner als NLM: so muß M, (eben weil Q auf G liegt) auf die Verlängerung des Bogens FIG über G, in V, also QM auf GV, (als der Verlängerung von FIG), fallen. Im ersten Falle (fig. XXXII.) nun deckte der Bogen NLM nur einen Theil Flm des Bogens FIG, im zweyten (fig. XXXI.) aber deckt ein Theil des Bogens NLM, dem ganzen Bogen FIG:

Also kann NLM nicht = FIG, seyn; und doch ist vermöge der Voraussetzung NLM = FIG:

Folglich muß Q von M nicht unterschieden seyn: Also Q in M, mithin NQ auf NM liegen: Folglich NQ = NM, und also NM = FG, seyn.

Daher ist das

Δ NEM = Δ FEG (4. S.)

Folglich:

der Winkel NEM = dem Winkel FEG.

22. S. 1. Zusatz.

Gleiche Sehnen . . . . . gleiche Bogen.]
Denn ist (fig. 65.) die Sehne NM = FG; so sind die beyden Dreyecke MNE, EFG einander gleich, (4. S. 12. Erkl.) und daher der

W. NEM = W. FEG

Folglich der

Bogen NLM = B. FIG (22. S. I.)

und gleiche . . . . . Sehnen.]
Weil, wenn der

Bogen NLM = Bogen FIG,

der

W. NLM = W. FIG (22. S. II.)

und also

Δ NEM = Δ FEG (2. S. 12. Erkl.)

Folglich die

Sehne NM = der Sehne FG.

dieses giebt . . . . . = FLG]

Bogen NLM + B. NFIGM = Peripherie
= Bogen FIG + Bog. FNLQMG

Also:

Bog. NLM + B. N FIGM = B. FIG +
B. FNLQMG
NLM = FIG (weil
NM = FG angenommen)

Folglich:

Bog. NFIGM = Bog. FNLQMG,

wovon NFIGM des Bogens NLM, und FNLQMG des Bogens FIG Ergänzung zu der Peripherie um E.

alles

alles ..... gleich sind.]

Weil Kreise von gleichen Halbmessern, gleich groß sind, indem sie einander decken, wenn man sie so auf einander legt, daß ihre Mittelpuncte zusammen fallen; daher decken gleiche Bogen und gleiche Winkel einander.

22. S. 2. Zus.

Ein Perpendikel aus dem Mittelpunct eines Kreises auf die Sehne gefällt, halbiret verlängert auch der Sehne zugehörigen Bogen.

Bedingung.

In der 63. Figur sey
1) E der Mittelpunct;
2) AB die Sehne,
3) EI ein Loth aus E auf AB, daß verlängert den Bogen AIB in I schneidet.

Behauptung.

Bogen AI = Bogen IB.

Vorbereitung.

Man ziehe die Sehne AI und BI;

Beweis.

So ist, weil
AF = FB (17. S.)
FI = FI
W. AFI = W. IFB (3. Bed.)

△ AIF = △ BFI (2. S.)

Folglich

die Sehne AI = der Sehne BI,

wovon jene dem Bogen AI, diese dem Bogen IB, zugehört: Also,

Bogen AI = Bogen IB (22. S. 1. Z.)

22. Satz. 3. Zusatz.

Es muß . . . . . = FKD : GKD]

Die Verhältniß FKD : GKD, als eine Rationalverhältniß, kann man, (vermöge Ar. V. 24) der Verhältniß zwoer ganzen Zahlen gleich setzen.

Zu dieser Absicht aber muß man eine **Einheit** haben, welche diese Winkel genau mißt, und deren beyde Mengen, die auf dem einen oder dem andern gedachter Winkel gehen, müssen die beyden Zahlen seyn, deren Verhältniß = FKD : GKD.

Diese Einheit nun muß ein Winkel seyn. (Ar. I. 4.) Es sey daher dieselbe der kleine Winkel EKD; welcher, wenn er z. E. dreymal in FKD und fünfmal in GKD steckt, die Verhältniß

FKD : GKD = 3 . EKD : 5 . EKD
= 3 : 5

geben wird.

Wenn also überhaupt

FKD : GKD = p : q;

so muß EKD, pmal in FKD, und qmal in GKD, enthalten seyn.

Nun fällt zwischen des Winkels EKD Schenkeln der Bogen DE; wenn man daher den Winkel

kel FKD in p gleiche Winkel, jeder = EKD, theilt, so theilt man dadurch auch den zwischen des Winkels FKD Schenkeln fallenden Bogen DF in p gleiche Bogen, jeder = DE, (weil gleichen Winkeln am Mittelpuncte gleiche Bogen zukommen. (22. S. I.)) Folglich muß der Bogen DE, auch p mal im Bogen DF, und aus gleicher Ursache, qmal im Bogen DG, stecken; daher DF : DG = p . DE : q . DE (weil DF = p . DE; DG = q . DE) seyn:

Mithin ist nicht nur

FKD : GKD = p : q

sondern auch

DF : DG = p : q

Also

FKD : GKD = DF : DG

oder, welches einerley ist:

DF : DG = FKD : GKD.

... also ..... = p : q]

Dieß ist aber auch die Verhältniß der Bogen (wie vorausgesezt ward).

Also: da

DF : DG = p : q, und
FKD : GKD = p : q

FKD : GKD = DF : DG

Wenn ..... die Bogen.]

So erhellet es aus den beyden in diesem Zusatze erwiesenen Sätzen.

Eben das gilt aber auch, wenn die Winkel oder die Bogen eine Irrationalverhältniß haben, wie der 11. Zusatz darthut.

22. S. 6. Zusatz.

. . . . so ist . . . . . DF : DGHID]

df : dghid = fKd : 4 R (22. S. 4. Z.)

Aber

fKd = FKD (Ar. I. 87.)

Also:

df : dghid = FKD : 4 R

Mithin, weil

FKD : 4 R = DF : DGHID (22. S. 4. Z.)

---

df : dghid = DF : DGHID

22. Satz. 7. Zus.

Man legt . . . . . willkührlich.]

Auf folgende Art kann aus Pappe, Chartenpappier oder Messing ein **Winkelmesser** verfertiget werden.

Man beschreibt nämlich aus dem Mittelpunct A zweene Halbkreise DHE, KLM (XXXIII. fig.) und theilt einen davon in seine 180 Grade (weil, wenn der ganze Umkreis 360 Grade enthält, auf dem Halbkreis $\frac{360}{2} = 180°$ gehen müssen); Zieht man nun durch diese Theilpuncte Halbmesser, so wird dadurch der andere auch eben so eingetheilt.

An

An den Durchmesser DE, sezt man ferner das Rechteck DG, schneidet die Fläche KLMAK des kleinern Halbkreises, aus dem worauf die Figur gezeichnet ist, heraus, und bemerkt alsdann die Mittelpunctsstelle durch einen kleinen Einschnitt Abc.

Endlich wird das, was nach dem größern Halbkreis DHE, und dem Rechteck DG liegt, auch weggeschnitten;

Und man hat alsdann den verlangten Winkelmesser.

So ein verfertigtes Werkzeug findet man allemal unter den zum Zeichnen dienlichen Instrumenten, welche ein so genanntes mathematisches Besteck ausmachen.

Man nennt gedachtes Werkzeug einen Transporteur.

Auf ihn werden die Grade doppelt gezählt: Einmal von D durch H nach E, und dann rückwärts von M durch L nach K. Der ersten Zählung Anfang ist in D und Ende in E, der andern Zählung Anfang hingegen in M und Ende in K, mithin so, daß sowohl D und E, als K und M im Durchmesser DE liegen.

Durch diese Einrichtung aber ergiebt sich der Vortheil, daß man mittelst des Transporteurs auf einmal finden kann, wie viel Grade zween Nebenwinkel auf einer geraden Linie enthalten.

Hieraus nun lassen sich unter andern leicht folgende Aufgaben auflösen.

I) **Mittelst des Transporteurs zu finden, wie viel ein vorgegebener Winkel BAC (XXXIII. fig.) Grade enthält.**

Auflösung.

Man lege den Transporteur auf den vorgegebenen Winkel BAC so, daß seine Spitze mit des Transporteurs Mittelpunct, A, einer seiner Schenkel AC aber mit des Transporteurs Durchmesser DE, zusammen fällt.

Nun wird vom Transporteur ein Bogen EQ zwischen des zumessenden Winkels BAC Schenkeln liegen, auf dem man die Graden, die BAC fasset, zählen kann.

II) **Durch den Transporteur an eine gerade Linie AC, einen in Graden gegebenen Winkel zu zeichnen, daß sein Scheitel in einen gegebenen Punct A dieser Linie fällt.**

Auflösung.

Auf A lege man des Transporteurs Mittelpunct, und an AC seinen Durchmesser DE; zähle hierauf am Umkreise von E nach Q, so viele Grade ab, als der Winkel zu fassen gefodert wird; und, nachdem man die Stelle Q etwa mit einem Puncte bemerkt hat, ziehe man durch A und Q die Linie AQ.

Diese wird mit AC den verlangten Winkel einschliessen.

III)

III) Vermöge des Transporteurs jeden geradlinichten Winkel FKD (fig. 76.) in jede beliebige Anzahl, (die = n seyn mag) gleicher Theile zu theilen.

Auflösung.

Die Menge der Grade die der vorgegebene Winkel enthält, dividire man mit n; der Quotient zeigt die Menge der Grade an, die auf jeden der verlangten n gleich großen Theilen des Winkels FKD gehen.

Nun zeichne man an einen von beyden Schenkeln, an KD, einen Winkel EKD, der die durch vorige Division gefundene Anzahl Grade fasset, und zwar so, daß des gegebenen Winkels FKD Scheitel K auch dieses neuen Winkels Scheitel wird. Hierauf ziehe man aus K einen zwischen des Winkels FKD Scheitel fallenden Bogen, FD, so wird der nte aliquote Theil ED dieses Bogens FD zwischen des Winkels EKD Schenkeln fallen, weil der Winkel EKD der nte aliquote Theil von FKD ist. Nun nehme man die Sehne von ED, und trage sie von E nach F, welches n — 1mal geschehen kann.

Hierdurch theilt man den Bogen EF in n — 1 und folglich FD in n gleiche Theile, (22. S. 1. Z.)

Zieht man endlich aus K nach den Theilpuncten Halbmesser, so erhält man lauter gleiche Winkel, jeder = EKD (22. S. II.) und man hat so den Winkel FKD in n gleiche Theile getheilt.

Hier-

Hieraus erhellet auch zugleich, wie durch den Transporteur jeder Kreisbogen und folglich jeder Umkreis in jede verlangte Anzahl gleiche Theile getheilt werden kann.

Das Verfahren (I, II, III) mit dem Transporteur ist in der Ausübung nicht ganz sicher. Die Trigonometrie zeigt hiezu zuverlässigere Wege.

— Das Uebrige dieses Zusatzes, so wie des vorigen und der 5te, bedarf keiner Erläuterung. Sollte indessen ein Anfänger es nicht verstehen, dem kann vielleicht der 14, 15, 16, 17te der **Briefe über verschiedene Gegenstände aus der Mathematik**, zu einer Erläuterung dienen.

22. S. 8. Zus.

Das . . . . . stehet.]

Weil die Bogen allemal das Maaß der Mittelpunctswinkel, die auf sie stehen, sind. Da nun die ihnen zugehörigen Peripheriewinkel halb so groß sind: so können folglich diese nur die Hälfte der Grade fassen, die ihre Mittelpunctswinkel, also die Bogen, worauf sie stehen, enthalten.

Und . . . . . = 2 R]

Des Winkels MPL Maaß ist der Bogen MNOL, aber des Winkels MOL, der Bogen MPL; und

B. MNOL + B. MPL = Umkreis = 4 R

Also ist der Winkel MPL, MOL, Summe

$$MPL + MOL = \frac{B.\,MNOL + B.\,MPL}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$= \frac{1}{2}$ Umkreis
$= 2$ R.

22. S. 10. Zusatz.

Wenn ein Winkel sich nicht genau durch Grade messen liesse, so kann er doch entweder Theile von Graden, oder Grade und deren Theile enthalten. Nach des 13. S. 5. Zus. Anmerkung aber wird der Grad in 60 Minuten, diese in 60 Sekunden, u. s. f. getheilt; läßt sich daher ein Winkel ꝛc. (S. Buch.)

22. Satz. 11. Zusatz.

So . . . . . ausmessen.]

Denn ließen sich beyde durch einerley kleine Bogen ausmessen, so könnte man ihre Verhältniß in ganzen Zahlen angeben, und hätten daher keine Irrationalverhältniß, welche sie doch haben sollen.

. . . . aber GD nicht]

Eben weil die Bogen FD, GD, Irrationalverhältnisse haben sollen.

Es sey . . . . . 51 . ED]

Weil man durch Halbirungen des Bogens FD allemal einen Bogen ED erhält, der z. E. (wie im Buche) 50mal und etwas darüber im Bogen GD, aber nicht $50 + 1 = 51$mal, enthalten ist.

. . . . . so ist FD = 128 . g]

Weil $FD = 32 . ED$ angenommen, und $g = \frac{1}{4} ED$: Also $4 . g = ED$; folglich $32 . ED = 32 . 4 g = 128 . g$.

Wenn

Wenn : . . . . . will kommen]

Lieſt man von: Man nehme an die ꝛc. bis: III) 128 : 202 oder 203 u. ſ. w. und ſetzt ſtatt: Bogen GD, den Winkel GKD; ſtatt: Bogen FD, den Winkel FKD; und, ſtatt: Bogen ED den Winkel EKD; ſo wird man ſich dadurch vollkommen darthun können: daß ſich Rationalverhältniſſe finden laſſen, die der Irrationalverhältniß FKD : GKD ſo nahe als man will, kommen.

Ferner . . . . . werden kann.]

Da man allemal durch fortgeſezte Halbirungen des Bogens FD = e, einen kleinen Bogen ED = k finden kann, der eine ganze Anzahl mal in FD, enthalten iſt; ſo kann man, wenn dieſe Anzahl = n geſezt wird, allezeit e = nk, ſetzen; und aus gleicher Urſache den Winkel FKD, oder ε = nκ.

Nun ſieht man aus dem Vorhergehenden, daß je kleiner man k oder κ, nimmt, je genauer man GD = a mit k und GKD = α mit κ, meſſen kann.

Geſezt alſo, κ ſey in a, und daher k in α, m mal ganz und etwas darüber enthalten; ſo wird dieſes etwas deſto kleiner ſeyn, je kleiner k und κ iſt, und folglich je mehrmal k in e und κ in ε ſteckt, alſo je größer n iſt: Es muß daher hier n als eine ganze Zahl angenommen werden, die ſo groß als man will, folglich $\frac{1}{n}$ ſo klein als man will, (weil ein Bruch deſto kleiner wird, je größer ſein Nen-

Nenner bey ungeänderten Zähler anwächst) werden kann.

Also ist ..... $\frac{m+1}{n}$]

$a > mk$ $e = nk$	$a < (m+1)k$ $e = nk$
Also: $\frac{a}{e} > \frac{mk}{nk}$ (Ar. I. 88.) Aber $\frac{mk}{nk} = \frac{m}{n}$	$\frac{a}{e} < \frac{(m+1)k}{nk}$ (Ar. I. 88). Aber $\frac{(m+1)k}{nk} = \frac{m+1}{n}$
Folglich: $\frac{a}{e} > \frac{m}{n}$	Folglich: $\frac{a}{e} < \frac{m+1}{n}$

Auf eben die Art wird man sich überzeigen können, daß auch $\frac{\alpha}{\varepsilon} > \frac{m}{n}$ und $< \frac{m+1}{n}$

Man setze ..... $= x - y$]

Da $\frac{a}{e} > \frac{m}{n}$ und $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ auch $> \frac{m}{n}$; so fehlt $\frac{m}{n}$ Et-

was um $= \frac{a}{e}$ oder $= \frac{\alpha}{\varepsilon}$ zu werden; Dieses Et-

was das die Differenz im 1sten Falle zwischen $\frac{a}{e}$ und $\frac{m}{n}$, im andern aber zwischen $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ und $\frac{m}{n}$

ist,

ist, wollen wir für $\frac{a}{e}$ durch x für $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ aber durch y ausdrücken, so daß

$$\frac{a}{e} = \frac{m}{n} + x$$

$$\frac{\alpha}{\varepsilon} = \frac{m}{n} + y$$

Weil nun $\frac{a}{e} > \frac{\alpha}{\varepsilon}$ seyn soll; so muß auch

$$\frac{m}{n} + x > \frac{m}{n} + y$$

Folglich, wenn man

$$\frac{m}{n} = \frac{m}{n}, \text{ abzieht,}$$

$$x > y \text{ (Ar. 1. 88.)}$$

seyn.

Aber x so wohl als y ist kleiner als $\frac{1}{n}$:

Denn

$$\frac{a}{e} < \frac{m+1}{n}$$

$$\frac{a}{e} = \frac{m}{n} + x$$

Also:

$\frac{m}{n}$

$$\frac{m}{n} + x < \frac{m+1}{n}$$

$$\frac{m+1}{n} = \frac{m}{n} + \frac{1}{n}$$

Mithin

$$\frac{m}{n} + x < \frac{m}{n} + \frac{1}{n}$$

$\frac{m}{n} = \frac{m}{n}$ abgezogen.

Folglich:

$$x < \frac{1}{n} \text{ (Ar. I. 88.)}$$

Ferner ist

$$\frac{\alpha}{\varepsilon} < \frac{m+1}{n}$$

Folglich auch

$$\frac{m}{n} + y < \frac{m+1}{n}$$

oder

$$\frac{m}{n} + y < \frac{m}{n} + \frac{1}{n}$$

Also:

$$y < \frac{1}{n} \text{ (Ar. I. 88.)}$$

Da

$$\frac{a}{e} = \frac{m}{n} + x$$

$$\frac{\alpha}{\varepsilon} = \frac{m}{n} + y$$

---

so ist

$$\frac{a}{e} - \frac{\alpha}{\varepsilon} = \frac{m}{n} + x - \left(\frac{m}{n} + y\right)$$

$$= x - y.$$

Er ist ..... als $\frac{1}{n}$]

Denn $y < \frac{1}{n}$ und $x < \frac{1}{n}$; folglich muß um so mehr $x - y < \frac{1}{n}$ seyn.

beschrieben ward haben]

Eben das ergiebt sich auch, wenn $\frac{\alpha}{\varepsilon} > \frac{a}{e}$ oder $\alpha : \varepsilon > a : e$ gesezt wird;

Und ..... Bogen]

Und daher verhalten sich die Winkel wie die ihnen zugehörigen Bogen, und umgekehrt: die Bogen wie die ihnen zugehörigen Winkel.

23. Satz.

Gegeben.

Die Zahl n der gleichen Theile, in welche ein Kreis (wie 77. fig.) getheilt seyn soll.

Gesucht.

Die Größe jedes Winkels, E, D, C, ꝛc. welchen jede der zwischen jeglichen zween Theilpuncten gezogenen Sehne mit der nächst vorhergehenden oder nächst folgenden machet.

Auflösung und Beweis.

... der in Graden $= 360 - \frac{2 \cdot 360}{n}$, ist]

Denn der

Bogen FABCD = Per. EFABCDE — B. FED.

B. FED aber = 2 . Bog. ED

Also:

Bogen FABCD = Per. EFABCDE — 2 . B. ED

Folglich:

$$= 360° - 2 \cdot \frac{1}{n} \cdot 360°$$

$$= 360° - \frac{2 \cdot 360°}{n}$$

Also . . . . . (22. S. 8. Z.)]
Der Winkel E enthält halb so viel Grade als der Bogen FABCD worauf er stehet: (22. S. 8. Z.)

$$\text{W. E} = (360° - \frac{2 \cdot 360°}{n}) : 2$$

$$= \frac{360°}{2} - \frac{2 \cdot 360°}{2 \cdot n}$$

$$= 180° - \frac{360°}{n}$$

23. Satz. 1. Zusatz.

. . . wenn . . . . . beschreiben]
Denn, nachdem der Kreis in n gleiche Theile getheilt ist, darf man nur durch jede zween Theilpuncte eine Sehne ziehen: Alle diese Sehnen aber sind gleich (22. S. 1. Z.) und auch die Winkel, die jede zwo nächst an einander liegenden Sehnen machen, die Polygonwinkel, (23. S.) deren Scheitel alle in des Kreises Peripherie liegen: Folglich ist dadurch im Kreise ein ordentliches Vieleck beschrieben worden. (18. und 20. Erkl.)

dessen . . . . . gefunden wird]
In der 77. fig. sind, E, F, A u. s. w. Polygonwinkel. Nach dem 23. S. ist jeder $= 180° - \frac{360°}{n}$, d. i.

$$= 2R - \frac{4R}{n}$$

$$= n$$

$$= \frac{n \cdot 2R - 4R}{n}$$

$$= \frac{n \cdot 2R - 2 \cdot 2R}{n}$$

$$= \left(\frac{n-2}{n}\right) 2R$$

des 13. S. 7. Zus. gemäß.

23. Satz. 2. Zusatz.

Wenn man nach jeden Endpunct jeder Polygonseite Halbmesser zieht, so wird dadurch das im Kreise beschriebene Polygon in so viel gleich große Dreyecke getheilt, als es Seiten hat, wie aus dem Verfahren und 4. S. leicht erhellet.

23. Satz. 3. Zusatz.

Der Winkel AKB am Mittelpuncte, (K) den jede zween nächst an einander liegende und nach den Endpuncten A, B, einer Polygonseite AB gezogene Halbmesser KA, KB, einschließen, d. h. der Mittelpuncts- oder Centriwinkel (angulus centri)

ist $= \frac{360°}{n}$:

Denn alle Winkel um K betragen zusammen 4R (8. S. 2. Z.) oder 360°, (22. S. 5. Zus.) alle Centriwinkel eines ordentlichen Polygons aber sind einander gleich (22. S. 11.), und so viele als das Polygon Seiten hat; (23. S. 2. Z.) Ist daher die Zahl der Seiten $= n$, so ist jeder Centriwin-

Centriwinkel $= \frac{360°}{n} = \frac{1}{n} \cdot 360°$, oder $= \frac{4\,R}{n}$.

23. Satz. 3. Zusatz. Anm.

[Eine Tafel . . . . . sezt]

Wenn man in die Formel

$$180° - \frac{360}{n}$$

nach und nach $n = 3; = 4; = 5; = 6; = 7; = 8$; u. s. f. sezt: so kann man dadurch eine Tafel für die Polygonwinkel verfertigen; für die Centriwinkel aber, wenn man dieß mit der Formel

$$\frac{360°}{n}$$

thut.

Folgendes ist ein Anfang dazu.

Für n	ist der Polygonw.	Centriwink.
= 5 od. das Fünfeck	108°, 0′ 0″	72° 0′ 0″
= 6 " " Sechseck	120° 0′ 0″	60° 0′ 0″
= 7 " " Siebeneck	128° 34′ 17 $\frac{1}{7}$″	51° 25′ 42 $\frac{6}{7}$″
= 8 " " Achteck	135° 0′ 0″	45° 0′ 0″

u. s. w.

Aus der Formel

$$180° - \frac{360°}{n}$$

erhellet

erhellet auch, daß Polygon, und Centriwinkel einander zu 180° oder 2 R, ergänzen, weil $\frac{360°}{n}$ jeden Centriwinkel ausdruckt.

23. Satz. 7. Zusatz.

... dieses ..... Sechseck (6. Zus.)]

Wenn man über die gegebene Linie DC als der gegebenen Seite des zu beschreibenden Sechseck ein gleichseitiges Δ verzeichnet hat; so giebt dessen Spitze K den Mittelpunct, woraus man mit KD, als einem Halbmesser, = DC, einen Kreis beschreiben kann, wo DC die Sehne seines 6ten Theils ist; (Verz. und 5. Zus.); also diese noch 5mal herum getragen, giebt das verlangte Sechseck (23. S. 6. Z.).

23. Satz. 8. Zusatz.

.... trage ..... Polygonwinkel]

Also Winkel, jeder =

$$\frac{180° - \frac{360°}{n}}{2}$$

$$= 90° - \frac{180°}{n}$$

wenn n die Zahl der Seiten des zu beschreibenden regulären Polygons.

so giebt ..... tragen]

Beyde auf diese Art gezogene Linien DK, KC, werden einander in K schneiden, und mit DC, das

gleichschenklichte Δ DKC ausmachen. K wird der Mittelpunct und KC = KD der Halbmesser des Kreises seyn, der vermöge 23. S. 4. Zusatz um das verlangte Polygon gehen muß, und daher in demselben, nur die Sehne DC, als die gegebene Linie oder Seite, herum tragen darf.

Denn dadurch erhält man DC = CB = BA und s. w.; und nachdem KB, und KA ꝛc. gezogen, auch lauter gleiche Dreyecke DKC; KCB; AKB ꝛc. (4. S.) Folglich DCB = CBA ꝛc. Also das Verlangte. (18. Erkl.)

23. Satz. 8. Zusatz. Anm.

Dieses . . . . . bedient]

Weil man damit nicht so richtig verfahren kann, wie es die Theorie erfodert.

Sonst . . . . . Dreyeck]

Z. E. Das reguläre Vieleck der 77. Figur ist ein Sechseck; Wenn man daher jeden Bogen AF, FE ꝛc. halbirt, und jedes solchen halben Bogens Sehne zieht; so erhält man das Zwölfeck.

Zieht man aber jedes doppelten Bogens, wie AFE = 2 . AF, Sehne; so bekommt man das gleichseitige Dreyeck.

23. Satz. 10. Zusatz.

. . . . so . . . . . gleich]

Denn aller dieser Dreyeck akc, bkc ꝛc. Grundlinien sind gleich, sie haben alle einerley Höhe; nämlich das Loth ka; daher müssen sie alle, vermöge

möge 14. S. 2. Zus. gleichen Inhalts seyn: Nun ist aber auch jedes solchen Δ Grundlinie und Höhe, = der Grundlinie und Höhe des Δ AKB; und daher muß aus gleicher Ursache jedes Dreyeck akb, akc ꝛc. = Δ AKB seyn.

d. i. als Δ kag]

Denn alle die Dreyecke akc, bkc ꝛc. der 77. * Figur, machen daselbst das Δ kag aus. Es sind aber so viele solcher Dreyecke, als das ordentliche Vieleck der 77. Figur Seiten, oder Dreyecke wie AKB, hat, weil die Zahl der gleichen Grundlinien auf ag so groß wie die Zahl der Seiten des regulären Vielecks seyn sollen.

oder . . . . . ist]

Hieraus nun ist der Satz dargethan:

Jedes ordentliche Vieleck ist so groß als ein Dreyeck, dessen Höhe der Entfernung jeder Seite des Polygons vom Mittelpunct des um ihn beschriebenen Kreises, und dessen Grundlinie des Polygons Umfang, gleicher.

24. Satz.

Bedingung.

In den Dreyecken BAC, CED (78. fig.) seyen die Höhen gleich;
BC sey des Δ BAC; und CD des Δ CED, Grundlinie.

Behauptung.

Δ BAC : Δ CED = BC : CD.

Beweis.

... Also ..... = BC : CD]

Denn da BC = m . Bb; CD = n . Dd; so ist

BC : CD = m . Bb : n . Dd

= m : n (weil Dd = Bb)

Aber

Δ BAC : Δ CED = m . Δ ABb : n Δ DEd

= m : n (weil Δ ABb = Δ DEd)

Folglich

Δ BAC : Δ CED = BC : CD.

24. S. 1. Zusatz.

.... schreibt]

Da der dortige Zusatz hier völlig gilt, so bald man sich unter den dortigen Größen, die Größen hier, vorstellt, so kann man k hier das **Element der Grundlinien**, a; e; und $\varkappa$, das **Element der Dreyecke** α, ε heissen.

Uebrigens ..... vorstellen]

Weil jede Größe durch Zahlen, und jede Zahl durch eine Linie ausgedruckt werden kann;

Denn man darf nur dieser Linie so viel Theile des Längenmaßes geben, daß diese Theile zusammen so viel betragen, als die Zahl, die die Linie ausdrücken soll, Einheiten hat.

Rationalverhältnisse kann man also durch ein Paar Linien angeben, die von einer endlichen Einheit, oder gemeinschaftlichem Maaße genau gemessen werden; Da man hingegen bey Irrationalverhältnissen, das Paar Linien ansehen muß, als würden

den sie von einem unendlich kleinen gemeinschaftlichen Maaße, von einem Element, gemessen.

Eine solche unendlich kleine Einheit läßt sich freylich nicht angeben: Indessen kommt man der Wahrheit desto näher, je kleiner man sie nimmt, weil für jeder auch so kleinen Größe, eine andere noch kleinere gegeben werden kann.

.....mehr Irrationalverhältnisse.

Wie hier z. E. die Verhältnisse der Bogen und Winkel, der Dreyecke und Grundlinien.

24. Satz. 1. Zusatz. Anm.

Euklides handelt in dem 5ten Buche seiner Elemente allgemein von Proportionen.

Deswegen, und um den Schwierigkeiten, welche die Irrationalverhältnisse bey den Beweisen verursachen, auszuweichen, gründet er diese Lehre auf folgende Definition der Proportion:

In eadem ratione magnitudines dicuntur esse, prima (A) ad secundam (B) et tertia (C) ad quartam (D), cum primae et tertiae aeque multiplicia, a secundae et quartae aeque multiplicibus, qualiscunque sit haec multiplicatio, utrumque ab utroque vel una deficiunt, vel una aequalia sunt, vel una excedunt, si ea sumantur aeque multiplicia, quae inter se respondent.

Diese Erklärung fasset so wohl die National- als Irrationalverhältnisse in sich, und man kann sie nach der itzigen Bezeichnung so ausdrücken:

Die

Die Verhältniß A : B ist der Verhältniß C : D gleich, wenn man gewiß weiß, daß allemal

$$mA > nB, \text{ wenn } mC > nD,$$
$$mA = nB \text{ wenn } mC = nD$$
$$mA < (n+1)B \text{ wenn } mC < (n+1)D$$

was auch m und n für ganze Zahlen bedeuten.

Dieß stimmt mit Ar. V, 16, vollkommen überein: Denn daselbst ist nur alsdann A : B = C : D, wenn $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ ist; oder wenn beyde Verhältnisse einen gleichen Exponenten haben.

Dieser kann nun eine ganze Zahl oder ein Bruch seyn, (Ar. V. 27.) und man kann ihn daher bey Rationalverhältnissen allemal, einem rationalen Bruch, $\frac{n}{m}$ gleich setzen (Ar. V. 26, 23): Also hat man in diesem Falle, allemal $nA = mB$, wenn $nC = mD$.

Hingegen bey Irrationalverhältnissen, fällt der Quotiente allemal, zwischen zwo Rationalbrüche, (Ar. V. 27.) deren Zähler um 1 unterschieden sind: Oder allemal zwischen $\frac{n}{m}$ und $\frac{n+1}{m}$ $(= \frac{n}{m} + \frac{1}{n})$, daß also $\frac{A}{B}$ $(= \frac{C}{D})$ $> \frac{n}{m}$ und $< \frac{n+1}{m}$: Folglich

mA

$mA \rhd nB$, wenn $mC \rhd nD$
$mA \lhd (n+1)B$ wenn $mC \lhd (n+1)D$

Von zwo Verhältnissen, wovon die eine größer als die andere seyn soll, oder $A : B \rhd C : D$, sofert Euklides, daß allemal

$$mA \rhd nB \text{ sey, wenn } mC \leqq nD$$

ist; Er faßt dieß in folgende Erklärung:

Cum vero aeque multiplicium multiplex primae magnitudinis (A) excesserit multiplicem secundae, (B) at multiplex tertiae (C) non excesserit multiplicem quartae (D); tunc prima ad secundam *maiorem* habere dicitur *rationem*, quam tertia ad quartam.

Wäre daher

$$mA \lhd nB \text{ wenn } mC \leqq nD;$$

so könnte man sagen,

daß $A : B \lhd C : D$

sey.

Die erste Definition ist bey einigen Ausgaben des Euklides, z. E. der von **Clavius**, **Barrow**, **Coetsius**, ꝛc. die 6te, und die zwote die 8te; bey andern hingegen, z. E. der von **König** oder **Blassiere**, **Hentsch** (in der Introd. plana in Philosoph. Philosoph. ex Eucl. restit.), **Bärmann** ꝛc. ist jene die 5te diese die 7te; — weil bey jenen Ausgaben die Erklärung: *Proportio* est rationum similitudo, zur 4ten Erklärung, bey diesen aber, zur 8ten, genommen wird.

Ueber-

Ueberhaupt ist zweifelhaft, ob diese lezt gedachte Erklärung vom Euklides ist.

24. S. 2. Zus.

Das Δ BAC ist die Hälfte des Parallelograms das über BC als einer Grundlinie, und Δ CED die Hälfte des Parallelogramms das über CD, als einer Grundlinie, beschrieben werden kann; Jenes heisse X dieses Y; so ist

$$X = 2 . \Delta BAC,$$
$$Y = 2 . \Delta CED$$

Beyde Parallelogramme haben wie gehörig gleiche Höhen, weil der Dreyecke BAC, CED Höhen, gleich sind. (Bed. d. 24. S.)

Nun ist aber

$$\Delta BAC : \Delta CED = BC : CD$$

Also:

$$2 . \Delta BAC : 2 . CED = BC : CD \text{ (Ar. V, 21)}$$

d. i.

$$X : Y = BC : CD$$

d. h. Parallelogramme von gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundlinien.

25. Satz.

I. Wenn in einem Dreyecke (ABC) zwo Seiten (BA, AC) von einer mit der 3ten Seite gleichlaufenden Linie (DE) geschnitten werden; so sind die abgeschnittenen Stücke einander proportional. (AD : DB = AE : EB)

II) Umgekehrt: Wenn zwo Seiten (AB, AC) eines Dreyecks (ABC) von einer Linie (DE) so geschnitten werden, daß die abgeschnittenen Stücken, seinander proportional sind, so ist diese Linie (DE) mit der 3ten Seite (BC) parallel.

Für I.

Bedingung.

In dem △ ABC (79. fig.) seyen die die zwo Seiten AB, AC schneidende Linie DE, mit der Grundlinie oder 3ten Seite BC, parallel;

Behauptung.

So ist

$$AD : DB = AE : EC$$

Vorbereitung.

Man ziehe DC und EB;

Beweis.

So sind die Dreyecke DEC, BEC, (weil sie auf einerley Grundlinie DE stehen, und ihre Spitzen B, C, in einer Parallele mit DE liegen) gleich [14. S. 2. B.]. Also hat das △ ADE zu beyden einerley Verhältniß, d. i.

$$\triangle ADE : \triangle DEB = \triangle ADE : \triangle CDE.$$

Aber, da die Dreyecke ADE, DEB eine gemeinschaftliche Spitze E, haben, so haben sie gleich große Höhen, so wie auch, aus gleicher Ursache, die Dreyecke ADE, EDC, deren gemeinschaftliche Spitze D ist; daher verhält sich

△ ADE

$\Delta ADE : \Delta DEB = AD : DB$
$\Delta ADE : \Delta EDC = AE : EC$ } (24. S.)

Also:

$AD : DB = AE : EC$

Für II.

Bedingung.

Im Δ ABC sey $AD : DB = AE : EC$

Behauptung.

So ist
DE parallel mit BC.

Beweis.

$AD : DB = \Delta ADE : \Delta DEB$
$AE : EC = \Delta ADE : \Delta EDC$ } (24. S.)

Also:

$\Delta ADE : \Delta DEB = \Delta ADE : \Delta EDC.$

oder

$\Delta ADE : \Delta ADE = \Delta DEB : \Delta EDC$
(Ar. V. 34, verw.)

Folglich:

$\Delta DEB = \Delta DEC$ (Ar. V. 17)

Diese Dreyecke aber stehen auf einerley Grundlinie DE: Folglich:

BC parallel mit DE (14. S. 2. Z.)

25. Satz. 2. Zusatz.

$AD : AE = DB : EC$
$AD : AE = AD + DB : AE + EC$ (Ar. V, 34, II.)

Also:

Also:

$$AD : AE = AB : AC$$

Folglich:

$$AD : AB = AE : AC. \text{ (Ar. V. 34.)}$$

25. Satz. 3. Zusatz.

Bedingung.

Im Δ AEB, werde der Winkel AEB von der Linie ED halbiret, daß also W. AEB $= 2 \cdot$ AED.

Behauptung.

$$AE : EB = AD : DB.$$

Vorbereitung.

1) Man verlängere AE nach C;
2) nehme darauf EC $=$ EB,
3) und ziehe BC;

Beweis.

So ist das Δ BEC gleichschenklicht, und daher der

$$\text{W. EBC} = \text{ECB}; \text{ (2. S. 3. Z.)}$$

Aber:

$$\text{W. AEB} = \text{W. EBC} + \text{W. ECB (13. S. 1. Z.)}$$
$$= 2 \cdot \text{ECB};$$
$$= 2 \cdot \text{AED (Bed.)}$$

Also

$$\text{W. ECB} = \text{W. AED}$$

Folglich

BC parallel ED (11. S.)

Mithin:

$$AE : EC = AD : DB \text{ (25. S.)}$$

und, da

$$EC = EB \text{ (Vorber.)}$$

$$AE : EB = AD : DB.$$

25. Satz. 4. Zusatz.

.... CB gleichlaufend]

Wie aus II des 25. S. erhellet.

$= \frac{1}{2}(ECB + EBC)$ ..... (13. S. 1. B.)]

W. $AED = ECB$ (12. S.)

$AED = EBC$ (weil $ECB = EBC$ [2. S. 3. B.])

Also:

$$2\,AED = ECB + EBC \text{ (Nr. I. 88.)}$$

Folglich:

$$AED = \frac{ECB + EBC}{2}$$

$$ECB + EBC = AEB \text{ (13. S. 1. B.)}$$

Also:

$$AED = \tfrac{1}{2}\,AEB.$$

26. Satz.

Bedingung

In den beyden Dreyecken ABC, CDE, der 80. Figur, sey der

W. $BAC =$ W. CDE

$ABC =$ DCE

Also:

$ACB =$ DEC

(weil

(weil nach den 13. S. A + B + ACB = DCE + D + E und verm. Bed. A + B = DCE + D)

Behauptung.

BA : BC = CD : CE
BC : CA = CE : ED
BA : AC = CD : DF.

Vorbereitung.

Man lege zwo Seiten die in beyden Dreyecken gleichen Winkeln gegen über stehen, wie BC, CE, in eine gerade Linie BE;

Beweis.

So ist ꝛc. (S. Buch. bis : = AF)

Ferner BA : BC = AF : CE]

Erhellet aus des 25. S. 1. Z. indem im Δ FBE die Linie AC mit der Grundlinie FE gleichlaufend ist, und BA : AF = BC : CE.

und ..... beydes aus (25. S. 1. Z.)]

Im Δ FEB ist DC mit FB parallel, daher

CE : BC = DE : FD (25. S. I.)

oder:

BC : CE = FD : DE (Ar. V. 19.)

Also:

BC : FD = CE : DE (25. S. 1. Z.)

schreibt man ꝛc.]

Folgende zwo Proportionen sind bisher in diesem Beweise dargethan:

1) BA : BC = AF : CE
2) BC : DF = CE : DE.

Sezt man nun in die erste, CD statt AF, und in die andere AC, statt DF; (weil CD = AF; AC = DF) so ergeben sich nachstehende zwo Proportionen:

BA : BC = CD : CE
BC : AC = CE : DE;

und aus diesen, die:

BA : AC = CD : DE. (Ar. V. 57.)

26. Satz. Zusatz.

Folgende sind diese drey Proportionen:

1) BA : CD = BC : CE
2) BC : CE = AC : DE
3) BA : CD = AC : DE

Die erste ist die im Buche z. Ex.; und ihre beyden vorhergehenden Glieder BA, BC, gehören dem Δ ABC zu, aber ihre nachfolgende, dem Δ CDE. Erstern Δ gehört auch in 2) die Seiten BC, AC, im 3) die Seiten BA, AC; leztern Δ hingegen, im 2) die Seiten CE, DE, und im 3) die CD, DE.

27. Satz.

Wenn in zwo Dreyecken (BAC, bac) die Seiten proportionirt sind; so sind die Winkel in der Ordnung wie sie den proportionirten Seiten gegen über stehen, gleich.

Bedingung.

In den beyden Dreyecken ABC, abc, der 81. Figur, sey

1) BA

1) BA : AC = ba : ac
2) AC : CB = ac : cb : folglich
(verm. A. V. 51.)
3) BA : BC = ba : bc

Behauptung.

W. B = W. abc;
C = acb
A = a

Vorbereitung.

Man setze an b einen Winkel pbc, = B, und an c einen Winkel pcb = C (10. S.)

Beweis.

So haben die Dreyecke BAC, bpc gleiche Winkel (Vorber., u. 13. S.), daher ist, vermöge des 26. Satzes

BA : BC = bp : bc

Aber

BA : BC = ba : bc (3. Bed.)

Folglich:

ba : bc = bp : bc

oder:

ba : bp = bc : bc (Ar. V. 34.)

Folglich:

ba = bp (Ar. V. 18.)

Eben so ꝛc. (S. Buch.)

29. Satz. Zusatz.

Dreyecke die einerley Winkel haben, haben proportionirte Seiten, (26. S.) und Dreyecke die

proportionirte Seiten haben, haben einerley Winkel. (27. S.) Dieß aber wird, vermöge der 19. Erklärung, zur Aehnlichkeit der Dreyecke erfodert; Also sind Dreyecke, wie im 26. und 27. Satze, ähnliche Dreyecke.

Und ähnliche Dreyecke haben sowohl gleiche Winkel als proportionirte Seiten; weil aus den proportionirten Seiten die gleichen Winkel, (27. S.) und aus den gleichen Winkeln die proportionirten Seiten (26. S.) folgen.

27. Satz. Zusatz. Anm.

Wolfs Begrif der Aehnlichkeit ist metaphysisch. Die metaphysischen Principia aber haben keine solche Evidenz, wie in der Geometrie erfodert wird.

Man lese hierüber des Herrn Castillon Vorrede zu seinem Euklides.

Daselbst sagt er unter andern:

— — les demonstrations philosophiques s' echappent plus aisement. J'en ai fait l'essai, je l'avoue. En explicant Euclide j'ai quelquefois substitué mes raisonnemens à ceux de cet Auteur. On m'a applaudi; mais le lendemain on a demandé avec instance la demonstration ordinaire (c'est à dire, cette d'Euclide) — —

28. Satz.

Wenn zwey Dreyecke (ABC, abc) einen gleichen Winkel (B, abc) haben, und die Seiten (BA, BC, ba, bc) die den gleichen Winkel ein-

einschliessen, proportionirt sind; so sind diese Dreyecke ähnlich.

Bedingung.

In den Dreyecken ABC, abc der 81. Figur, sey B = abc; und AB : BC = ab : bc

---

Behauptung.

△ ABC ist ähnlich dem △ abc.

Vorbereitung.

An b setze man den Winkel cbp = B, desgleichen an c den Winkel bcp = C. (10. S.)

Beweis

So sind (vermöge des 27. S. Zusatz) die Dreyecke BAC, pbc ähnlich, und ꝛc. (S. Buch.)

29. Satz.

Gegeben

Eine Linie AB (82. fig.)
Theile AD, DE, EG, einer andern Linie AG.

Gesucht

Theile von AB, die sich eben so wie AD, DE, EG verhalten.

Auflösung.

(S. Buch.)

Beweis.

Es ist zu beweisen: daß

1) AD : DE = AH : HF
2) = FG : FB

u. s. w. sey.

Weil nun vermöge der Verzeichnnng DH und FE parallel, so ist in dem △ EAF,

AD : DE = AH : HF (25. S.)

Also 1) bewiesen.

Hieraus folgt aber (verm. Arith. V. 34, zusam.)

AD + DE : DE = AH + HF : HF

d. i.

AE : DE = AF : HF

Also (verwechselt):

a) AE : AF = DE : HF

Thut man dieß bey der 1) Proportion, nämlich bey AD : DE = AH : HF, so hat man auch

b) AD : AH = DE : HF;

Ferner:

AE : AF = EG : FB (Verz. u. 25. S.)

Also:

DE : HF = EG : FB (a,)
DE : EG = HF : FB (Ar. V, 34.)

und

AD : AH = EG : FB (b,)

mithin 2) bewiesen.

Folglich ist

AD : AH = DE : HF = EG : GB

Durch welche ꝛc. (S. Buch)

29. Satz. 1. Zusatz.

Eine gegebene gerade Linie AB in eine verlang-

te Anzahl gleicher Theile zu theilen, zieht man durch A eine Linie AG so wie es die Auflösung vor. E. erfodert, nimmt darauf ein Stück AD von willkührlicher Größe, und trägt es von A in D, von D in E u. s. w. so vielmal, als AB Theile haben soll; hierauf zieht man durch den lezten Theilpunct, G, und der Linie AB Endpunct, B, die Linie GB, und mit der durch alle Theilpuncte Parallelen, EF ꝛc. welche AB in die verlangte Anzahl gleiche Theile theilen werden.

Denn es ist

$$AD : DE = AH : HF$$
$$= EG : FB$$
u. s. w.

(29. S.) und $AD = DE = EG$ ꝛc. (Verz.) Also $AH = HF = FB$ u. s. w.

29. Satz. 1. Zusatz. Anm.

Der Theorie nach kann man zwar so viel Stücke als man will, an einander setzen; Allein durch den Gebrauch des Zirkels entstehen Fehler, welche man so viel als möglich vermeiden muß. Die Fehler müssen nicht auf eine Seite fallen, sich also nicht fortpflanzen. Durch das Verfahren nun, das unser Herr Autor angiebt, werden die Fehler vertheilt. —

Man sehe Herrn Prof. **Mayers, gründlichen und ausführlichen Unterricht** zur practischen Geom. I. Th. 69. §.

30. Satz.

Gegeben Drey Linien AB, AC, BD.

Gesucht Die vierte Proportionallinie CE zu diesen Linien.

Auflösung.

1) Man verzeichne einen Winkel A von willkührlicher Größe;
2) Auf den einen Schenkel trage man aus A die erste der gegebenen Linien AB, und aus B die dritte BD.
3) Auf den andern Schenkel aber, wieder aus A, die 2te Linie AC;
4) Ziehe hierauf BC, und
5) durch D mit BC die Parallele DE (11. S. 1. Z.)

So ist CE die gesuchte vierte Proportionallinie, oder

$$AB : AC = BD : CE.$$

Beweis.

Weil BC und DE parallel; so folgt die Proportion aus des 25. Satzes 1. Zusatz.

30. Satz. 1. Zusatz.

Soll also zu zwo gegebenen Linien die dritte Proportionallinie gefunden werden; (in welchem Falle allemal von einer stetigen Proportion die Rede ist) so darf man nur die zwote Linie zweymal, setzen, oder, welches eben das, BD = AC machen,

also die zweyte Linie AC, einmal aus A in C, und denn aus B in D tragen, übrigens eben das Verfahren der Auflösung voriger Aufgabe beobachten:

Denn

$$AB : AC = BD : CE$$

wird dadurch

$$AB : AC = AC : CE.$$

— Aus $AB : AC = BD : CE$ folgt $CE = \frac{AC \cdot BD}{AB}$, und aus $AB : AC = AC : CE$, ergiebt sich $CE = \frac{ACq}{AB}$: der erste Quotiente drückt also die 4te Proportionallinie zu AB, AC, BD, so wie der zweyte, die dritte zu AB, AC, aus, welches auch mit Ar. V. 20 übereinstimmt.

30. Satz. 2. Zusatz.

Hat man nach vorigem Zusatze zu zwo Linien, die p, q seyn mögen, eine dritte Proportionallinie, die f heissen mag, gefunden; so hat man

$$p : q = q : f$$

Folglich

$$p : f = 2 (p : q) \text{ (Ar. VI, 7)}$$

Sucht man nun zu q und f eine dritte Proportionallinie, t; so hat man auch

$$q : f = f : t;$$

und weil

$$q : f = p : q$$

ebenfalls:

$$p : q = q : f = f : t$$

Also

$$p : t = 3\,(p : q)$$ [Ar. VI. 9.]

und so ꝛc. (S. Buch.)

31. Satz.

Gegeben.

Zwo Linien AB, BC

Gesucht.

Zwischen AB und BC eine mittlere geometrische Proportionallinie.

Auflösung.

1) Auf einer willkührlich gezogenen geraden Linie AC trage man zuerst AB, dann aus B nach C die BC, so daß $AC = AB + BC$;
2) Nun halbire man AC und beschreibe aus dessen Mitte mit $\frac{1}{2}$ AC, als dem Halbmesser, einen halben Kreis, und
3) ziehe durch B auf AC das Loth BD, welches den halben Kreis in D schneiden wird.

BD ist die verlangte mittlere geometrische Proportionallinie.

Vorbereitung.

Man ziehe AD und DC;
So ist

Beweis.

W. $ADC = R$ (21. S. 1. Z.)
$= ADB + BDC$ (Vor. 8.)

Nun

Nun ist aber in dem rechtwinklichten △ BDC (Vorb. u. Aufl. 3))

$$BDC + C = R \text{ (13. S. 2. Zus.)}$$

Also:

$$ADB + BDC = BDC + C$$
$$BDC = BDC, \text{ abgez.}$$

Folglich

$$ADB = C$$

Und, (da

$$A + ADB = BDC + C \text{ (denn beyde Summen sind} = R,)$$

[13. S. 2. Z.])

$$A = BDC.$$

Also haben die Dreyecke ADB, BDC gleiche Winkel: daher ist vermöge des 26. Satzes

$$AB : BD = BD : BC.$$

31. Satz. 1. Zusatz.

Eine Verhältniß wie AB : BC halbiren, heißt nichts anders als eine Mittelgröße BD schaffen, daß dadurch AB : BD = BD : BC, werde. (Ar. VI. 8) Wenn man also mittelst der Auflösung voriger Aufgabe zwischen den Gliedern der Verhältniß AB : BC eine mittlere geometrische Proportionalgröße BD sucht, so ist dadurch AB : BC halbirt, und daher

$$AB : BD = \tfrac{1}{2} (AB : BC)$$

[Ar. VI. 8.]. Sucht man nun zwischen AB, BC, eine mittlere geometrische Proportionalgröße, b, so ist AB : b, = b ; BD, die Hälfte von AB : BD, folglich

AB :

$$AB : b = \tfrac{1}{4}(AB : BC) = \frac{1}{2^2}(AB : BC)$$

Geschieht dieß aber zwischen AB, und b, so daß c diese mitlere geometr. Proportionalgröße ist; so ist

$$AB : c, = c : b,$$

die Hälfte von AB : c, also das Viertel von AB : b Folglich:

$$AB : c = \tfrac{1}{8}(AB : BC) = \frac{1}{2^3}(AB : BC)$$

Auf diese Art also ist die Verhältniß AB : BC in 8 gleiche Theile getheilt, wovon AB : c einer ist. Man sieht also, daß wenn man n mal AB : BC halbirt, man

$$\frac{1}{2^n}(AB : BC)$$

erhält.

Eine Verhältniß, so wie einen Bogen und Winkel kann man nur mittelst der höhern Mathematik in 3 gleiche Theile theilen. Man hat keine Methode diese Theilung durch Zirkel und Lineal zu bewerkstelligen, welches erfodert würde, wenn man sie durch die gemeine oder euklideische Geometrie anstellen wollte.

Jedes ..... ähnlich sind;]
So sind die Dreyecke ADB, BDC, ADC (84. fig.) ähnlich.

Denn

W. DBA = DBC = ADC = R

DAB

DAB = BDC = DAB
ABC = BCA = BCA.

Also sind die vorhin genannten Dreyecke gleichwinklicht: Folglich ähnlich (27. S. Zus.)

und also . . . . . herleitet.]

Z. B.

I.

So folgt aus dem gleichvorhergehenden, daß allemal bey einem rechtwinklichten Δ ADC das Perpendikel BD, welches aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypothenuse (fig. 84.) AC, gefällt wird, die mittlere Proportionallinie, zwischen den beyden Theilen der Hypothenuse ist, welche dieses Loth abschneidet.

II.

Jede von den beyden Sehnen AD, DC, ist die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen dem Durchmesser AC, und dem Theil AB, oder BC von ihm, der an der Sehne AD oder DC, anliegt.

Denn diese Sehnen machen im Halbkreise ADC, den rechten Winkel ADC (21. S. 1. Z.) und mit dem Durchmesser AC das rechtwinklichte Δ ADC, dessen Hypothenuse AC. Ist nun DB ein Loth von D auf AC; so ist

AC : AD = AD : AB
AC : CD = D : CB.

III.

III.

Aus II. folgt:

$$AD_q = AC \cdot AB$$
$$CD_q = AC \cdot CB$$

Also:

$$AD_q + CD_q = AC \cdot AB + AC \cdot CB$$
$$= AC\,(AB + CB)$$
$$= AC \cdot AC$$
$$= AC_q,$$

welches ein anderer Beweis des pythagorischen Lehrsatzes (15. S.) ist.

Anwendung der bisherigen Lehren auf die ausübende Geometrie.

32. Satz.

Man ..... nennt.]

Bey Messung gerader Linien, muß man (nach Vorer. 2) eine bestimmte Länge zum Maaß oder Einheit annehmen. Hiezu bedient man sich fast durchgängig ohngefähr die Länge des Fusses eines erwachsenen Menschen. Daher heißt dieß Maaß ein Fuß: und man sieht daß es nicht aller Orten einerley ist.

Die Zeichen ..... einerley.]

So bedeutet bey Messung gerader Linien, z. E. 53°, drey und funfzig Ruthen; 4′, vier Fuß; 7″, sieben Zolle ꝛc.

32. Satz. 1. Zusatz.

Nach dem vorigen Satze ist

53°

$53^\circ = 53 \cdot 10' = 53 \cdot 10 \cdot 10'' =$
$53 \cdot 100 \cdot 10''' = 53000'''$;
$4' = 4 \cdot 10'' = 4 \cdot 10 \cdot 10''' = 400'''$
$7'' = 7 \cdot 10''' = 70'''$
$8''' = 8'''$

Also $53^\circ\ 4'\ 7''\ 8'''$ (oder $53^\circ + 4' + 7'' + 8'''$) $= 53478'''$ oder 53478 **Linien.**

32. Satz. 1. Zusatz. 1 Anm.

Es sey . . . . . $= 12$ y]

Es sey von einerley Länge, d. i. von einer Ruthe, Fuß ꝛc. der 10te Theil $=$ x, der 12te aber $=$ y; so bedeutet x, Fuß, Zolle ꝛc. der **zehntheilichten** oder **Decimaleintheilung**, y hingegen, Fuß, Zolle ꝛc. der **zwölftheiligen** oder **Duodecimaltheilung**, nachdem diese Länge, eine Ruthe, Fuß ꝛc. ist.

Hieraus ergiebt sich, wie im Buche,

1) $x = 1,2 \cdot y$

2) $y = \frac{5}{6} x = x \times 0,8333 \ldots$.

Die Formel 1) dient die 10theilichte Eintheilung auf die 12theilichte, zu bringen; und umgekehrt, die Formel 2).

Z. E. $7''\ 6'''$ Duodecimalmaaß in zehntheilichtes auszudrücken, verwandele man erstlich $7''\ 6'''$ in Linien, indem man $7 \times 12 + 6 = 90'''$ sucht; und man sieht, daß sich nun die Frage unsers Exempels hierauf bringt: wie viel betragen 90 Duodecimallinien an Decimallinien? Dieß zu erhalten multiplicire man in die Formel 2) die 90 und man wird so

$$90 \cdot y = 90 \cdot \tfrac{5}{6} x$$
$$= 15 \cdot 5 \cdot x = 75 \cdot x$$

erhalten, wo y und x Linien bedeuten. Also sind 90 Duodecimallinien = 75 Decimallinien.

Eben ..... wissen.]

Hiezu müssen die Verhältnisse, die die Maaße unter einander haben, bekannt seyn. Aus folgenden Büchern kann man sich deshalb Raths erholen.

Mayers practische Geometrie. I. Th. S. 52.

Karstens Anfangsgr. der Math. 1. Th. §. 252 u. f. der Rechenk.

Tielkens Unterricht für Officiers, die sich zu Feldingenieurs bilden ... 3te Aufl. 1779. Tab. I; II; III.

Böhms Feldkunst ... S. 281;

Riccioli Geograph. reformata. Lib. 2.

Io. Casp. Eisenschmidii de pond. et mens. Rom. Graec. Hebraeor. nec non de valore pecuniae veteris disquisitio. (Dieß Buch ist zu Strasburg zweymal aufgelegt, und zwar das anderemal 1737.)

32. Satz. 1. Zusatz. 2 Anm.

Beyder Verhältniß ..... getheilet.]

Heißt der Pariserfuß, p und der rheinländische r; so ist beyder Verhältniß, oder

$$p : r = 14400 : 13913$$

Man hat den Pariser Fuß in 12″, jeden dieser Zolle in 12 Linien, und jede Linie in 10 gleiche Theile,

Theile, also den Pariser Fuß in 12 . 12 . 10 = 1440 Theile getheilet, durch ꝛc. (S. Buch.)

Wäre . . . . . läßt.]

Da

$$p : r = 14400 : 13913$$

so ist

$$p = \frac{14400 \cdot r}{13913}$$

$$= r \times 1,03500323$$

Also der Pariser Fuß = 1,03500323 des Rheinländischen.

Frägt man: Wie viel betragen z. E. 6 Pariser Fuß an Rheinländischen: so hat man die Antwort durch

$$6 \cdot p = 6 \cdot r \times 1,03500323$$

d. i.

6 Pariser Fuß = 6 × 1,03500323 Rheinländ. Fuß.

Es ist nämlich . . . . . = 0,96618]

Da

$$p : r = 14400 : 13913$$

so ist

$$l(p : r) = l(14400 : 13913)$$
$$= l\,14400 : l\,13913$$
$$= 4,1583625 - 4,1434207$$
$$= 0,0149418$$

Welcher Logarithme zur Zahl 1,0350 gehört.

Nimmt man nun diesen Logarithmen negativ, so hat man l (r : p): Denn

$$l(r:p) = l(13913:14400)$$
$$= l(13913 - l\,14400$$
$$= 4,1434207 - 4,1583625$$
$$= -0,0149418$$

Aber, dieser Logarithme ist auch

$$= 5 - 0,0149418 - 5$$ (Ar. VI. Seit. 155)

$$= 4,9850582 - 5$$
$$= l\,96618 - l\,100000$$
$$= l\,\frac{96618}{100000} = l\,0,96618.$$

Folglich

$$l(r:p) \text{ oder } l\left(\frac{r}{p}\right) = l\,0,96618$$

Also:

$$\frac{r}{p} = 0,96618$$

d. i.

$r = p \cdot 0,96618$, oder:
der Rheinländische Fuß =
0,96618 des Pariser.

...giebt x..... Sturm]

$l\,x = 0,7930930$ giebt
$x = 6,210$ Rheinländische Fuß; oder
$= 6,210 \cdot r.$

Nun ist die rheinländische Ruthe in 12 rheinländi-

ländische Fuß, oder in 12 r eingetheilt, so wie der Fuß selbst in 12 Zoll; u. s. w.

Also ist

$$6,210 \cdot r = \tfrac{1}{2} \text{ rheinl. Ruthe} + \frac{21}{100} r;$$

und da die Toise = 6 Pariser Fuß; so beträgt sie

0,21 Rheinländische Fuß

über die halbe rheinländische zwölftheilichte Ruthe; oder 2 Toisen machen $2 \times 6,21 \cdot r = 12,42 \cdot r$,

d. i. eine Rheinländische Ruthe, und $\frac{42}{100}$ des Fus-

ses; oder, weil der Fuß oder $r = \frac{1}{12}$ Ruthe, so sind auch

$$2 \text{ Toisen} = 1^{\circ} + \frac{42}{100} \cdot \frac{1}{12} \text{ Ruthe}$$

$$= 1^{\circ} + \frac{42^{\circ}}{1200}$$

$$= 1^{\circ},035$$

Also

$$1 \text{ Toise} = \frac{1^{\circ},035}{2}$$

$$= 0,5175 \text{ Ruthe.}$$

32. Satz. 1. Zusatz. 4. Anm.

Das ..... ab (12. S. 3. Z.)]

Wenn Ak = 10 Ruthen; so ist Aa = ab = bc ꝛc. = 1 Ruthe, und die Stücken der Querlinien in dem schmalen Dreyecke ALa, sind Fusse,

so, daß Aa = 10 Fuß, das Stückgen der Querlinie bey K = 1′, das bey I = 2′ u. s. w.

Denn ALa, fig. XXXIV, sey das schmale Dreyeck ALa der 85. Figur, mit den Stückgen der Querlinien, welche, vermöge der Verzeichnung unter einander parallel sind, und dadurch, weil LA, 10 gleiche Theile; LK ꝛc. enthält; die Linie La in 10 gleiche Theile, getheilt worden, daß Lr = $\frac{1}{10}$ La, ꝛc. Nun ist (nach dem 26. S.)

$$LK : LA = K1 : Aa$$

oder, weil LA = 10 . LK (Verz.)

$$LK : 10 . LK = K1 : Aa$$

d. i.

$$K1' : Aa = 1 : 10$$

Also:

$$K1' = \frac{Aa}{10}$$

$$= \frac{1^0}{10}$$

$$= 1 \text{ Fuß.}$$

Ferner:

$$LI : LA = 2 : 10 = I2 : Aa$$

Also

$$I2 = \frac{2}{10} Aa = \frac{2^0}{10}$$

$$= 2 \text{ Fuß.}$$

Eben so beweiset sichs, daß H 3 = 3′; G 4 = 4′, u. s. w.

Wenn

Wenn aber, wie im Buche angenommen, Ak (85. fig.) = 1 Ruthe; so ist

Aa, = ab, = bc ꝛc. = 1 Fuß

und die Stückgen der Querlinien in dem schmalen Δ ALa, sind Zolle, daß also das Stückgen bey K = 1″, das bey I = 2″ u. s. w.

Denn bey dieser Annahme ist im Δ LAa (fig. XXXIV), Aa = 1 Fuß; Aber (26. S.)

LK : LA = K1 : Aa

= 1 : 10 (weil LA = 10 LK)

Also

$$K1 = \frac{Aa}{10}$$

$$= \frac{1'}{10}$$

= 1 Zoll.

Eben so erhält man

I2 = 2 Zoll

H3 = 3 Zoll

u. s. w.

Das übrige dieser Anmerkung, zeigt den Gebrauch des Maasstabes, und ist leicht zu verstehen.

Hiervon lese man auch unter andern Herrn Pr. Mayers practische Geometrie, I. Th. §. 67 ꝛc.

Uebrigens will ich hie noch erinnern: daß, wer einen Maasstab für 12theilige Eintheilung fertigen will, er nur überall da, wo man bisher 10 Theile hinsezte, 12 dergleichen hinsetzen darf.

Für einen Maasstab von 10 und 8 theiliger Eintheilung zugleich, (wie bey den Markscheidern vorkommt, welche sich meist 8 Theile des Lachters und 10 Theile des Achellachters, u. s. f. bedienen,) muß man Ak in 10 gleiche Theile und AL in 8 gleiche Theile, theilen.

32. Satz. 1. Zusatz. 5. Anmerk.

Wird solchergestalt von Ak gegen die rechte oder linke Hand, noch neunmal Ak oder neun Ruthen getragen, so bekommt man eine Länge von 10 Ak, oder Ruthen; Von dieser Länge also sind die Theile, Ak, kp u. s. w. **Zehntheilgen**, die Stücken Aa, ab ꝛc. auf Ak, **Hunderttheilgen**, und die Querstückgen in dem schmalen △ ALa, **Tausendtheilgen.**

Auf diese Art kann man eine Linie in 1000 gleiche Theile theilen: und ein diesergestalt eingerichteter Maasstab, heißt ein **tausendtheiliger Maasstab.**

Eben das erhält man auch, wenn man von k, nach z. E. p, zehen Ruthen trägt. Denn man bekommt so von k aus eine Länge, von der kp ꝛc. = Ak der zehnte, Aa = ab ꝛc. der hunderte Theil ist, und die Querstückgen im △ ALa, Tausendtheilgen sind.

32. S. 1. Zusatz. 8. Anmerk.

Z. E. dient der Maasstab der XXXV. Figur, wo

$B5 = \frac{1}{2}$ Bm, = m5

und

und nach dem Punct 5, der Mitte von Bm, die Linien a5 und O5 gezogen. Wäre nun

Bm, = aO, = 1°;

so wird

B5 = 5 Fuß

seyn. Da aber aB in 5 gleiche Theile getheilt ist, so ist

d1 = $\frac{1}{5}$ B5
= 1 Fuß
a2 = $\frac{2}{5}$ B5
= 2 Fuß
u. s. w.

(weil Od : Om = d1 : B5 = 1 : 5; Oc : Om = c2 : B5 = 2 : 5; u. s. w.) Eben so ist auch

α6 = a4
= 4 Fuß

Folglich

a6 = αa — α6
= 10 Fuß — 4 Fuß
= 6 Fuß.

Auf gleiche Art erhellet, (wegen

β7 = 3′
γ8 = 2′
δ9 = 1′)

daß nach der Ordnung

b7 = 7 Fuß
c8 = 8′
d9 = 9′.

Wäre aO, = Bm, = 1 Lachter; so würde

$d1 = \frac{1}{10}$ Lachter
$c2 = \frac{2}{10}$ Lachter
$b3 = \frac{3}{10}$ Lachter
u. s. w.
$d9 = \frac{9}{10}$ Lachter
$c8 = \frac{8}{10}$ Lachter
u. s. f.

seyn.

Man sieht leicht, daß diese Einrichtung des Maasstabes sehr bequem ist.

Mehrere Arten von Maasstäben lernet man bey practischen Schriftstellern kennen.

33. Satz.

Die beste Auflösung dieses und dergleichen Sätze findet man in Herrn Prof. Mayers practischer Geometrie, I. Th. 32 u. f. §.

2) Die Weitläuftigkeit einer vollständigen Beschreibung der Verfahren dieser und nächstfolgender Foderungen auch der Instrumente die zu solchen Verfahren nöthig sind, erlaubt nicht dergleichen hie beyzubringen.

In der **Feldmeßkunst** (Geodaesia) muß davon gehandelt werden.

Man wird sich deshalb leicht aus Büchern hierüber unterrichten können, zumal wenn man die dazu nöthige Theorie weiß. *)

Herr

*) Ausser erwähntem Buche Herrn Prof. Mayers, (wel-

Herr Prof. Mayer hat im angef. Buche in 12 und 13. §. gezeigt, was für Kenntnisse ein Feldmesser besitzen soll; — welches unter andern auch den Herren Markscheidern zum Nachlesen und das meiste davon zum Beherzigen zu empfehlen ist. —

Indessen wird es mir erlaubt seyn sie Anfängern nur zu zeigen, worauf die Sache ankommt.

3) Die Richtungen die Fäden haben, wenn man an ihnen eine Bleykugel oder sonst einen kleinen schweren Körper herab hängen läßt, heissen **Verticallinien**, und die mit ihnen rechte Winkel machen **Horizontallinien**.

4) Man denke sich durch diese Fäden eine Ebne (7. Erkl.) so groß man will; Selbige nennt man eine **Verticalebne**, oder auch **Verticalfläche**, und jede Ebne die auf ihr senkrecht steht (11. Th. 2. Erkl. 303 Seit.) eine **Horizontalebne**.

5) Wenn man auf dem Felde zwischen einer geraden Linie Endpuncte (die durch gewisse Merkmale bezeichnet seyn können) andere, die mit ihnen

(welches ohnstreitig die Feldmeßkunst am besten und vollständigsten abhandelt) geben von diesem Geschäfte, unter andern auch folgende Unterricht:

Herrn Geh. R. **Böhms**, (schon angeführte) gründliche Anleitung zur Meßkunst auf dem Felde; die 2te Aufl. ist von 1779.

Wilkens Landesvermessungen; Zollmanns Geodäsie; Helfenzrieders Geodäsie; Hogrevens Anweisung zur topographischen Vermessung eines Landes 2c.

nen in einer Verticalebne liegen, zu bestimmen hat; so heissen dieß die Feldmesser eine **gerade Linie abstecken.**

Eigentlicher heißt es mit Herrn Prof. Mayer (I. Th. §. 30) eine **Verticalfläche abstecken.**

7) Hiezu nun braucht man **Absteckestäbe.**

Das sind runde Stangen von gutem trocknen Holze, 5 und mehr Fuß hoch, ohngefehr 1 Zoll dicke, und unten mit einer eisernen Spitze oder Stachel versehen, um sie damit in den Boden zu befestigen.

Sind sie an ihrem oberen Ende mit einer Fahne versehen, so heissen sie **Meßfahnen.**

8) **Um eine Verticalfläche abzustecken, so müssen auf dem Felde zween Puncte gegeben seyn.**

9) **In diese befestiget man im Boden vertical ein paar Absteckestäbe.**

10) Nun tritt man zween oder drey Schritte hinter dem einen, und läßt einen Absteckestab vertikal so stecken, daß, wenn man mit dem Auge längst dem, hinter dem man steht, vorbey und nach dem andern Stabe (in 9) visiret oder zielet, es scheinet, als wenn alle drey, gleichsam einen einzigen Stab ausmachten.

11) So verfährt man mit allen Stäben, die man einzusetzen hat, um das Verlangte (8, 6) zu erhalten.

12) Bey dem Falle, wo man den einen Stab (in 9) von dem andern aus nicht sehen kann, ist dieses Verfahren nicht brauchbar.

Diesen und noch verschiedene schwerere Fälle aufzulösen, muß man aus Büchern über die Feldmeßkunst lernen.

13) Zu Ausmessung gerader Linien braucht man einen **Maasstab** oder eine **Meßkette.**

Jener ist eine gerade ohngefähr 1 Zoll breite und $\frac{1}{2}$ Zoll dicke viereckigte Stange von gutem Holze, auf welche man eine gewisse Anzahl von Füssen so genau als möglich verzeichnet, und selbige durch zarte Einschnitte von Zolle und Linien eintheilet. Sie sind 6 und mehr Fuß lang.

Diese (die Meßkette) besteht aus einer Menge gleichlangen Stäben von eisernen Drathe in der Dicke eines mäßigen Federkiels; jeder Stab ist an seinen Enden umgebogen, und alle müssen durch Ringe von geschlagenen Messinge mit einander so verbunden seyn, daß durchaus zwischen den Mittelpuncten jedes Paar nächstaufeinander folgenden Ringen, genau einerley Länge, meist die eines Fusses, sich findet. Gemeiniglich sind so viel solche Glieder aneinander gehängt, daß die Kette 5 Ruthen lang ist. Ueberdieß werden die beyden äussersten Enden der Kette mit zween Ringen versehen, die etwa 1 $\frac{1}{2}$ Zoll im Durchmesser haben. Sie dienen, um der Kette beyde Ende, an die zugehörigen Kettenstäbe zu stecken.

Diese

Diese sind runde Stäbe, etwa 4 Fuß hoch und so dicke, daß man genannte Ringe herablassen kann. Unten im Mittelpuncte der Grundfläche ist eine eiserne Stachel befestiget; meistens ist sie an der Seitenfläche angeschuhet; gleich darüber geht durch den Kettenstab ein auf beyden Seiten hervorragender Stift, auf dem die äussersten Ringe der Kette aufliegen können.

14) Auf einer ebnen Fläche eine gerade Linie CF (fig. 1.) auszumessen.

15) Man stecke die äussersten Ringe der Meßkette an die Kettenstäbe, so, daß wenn die Stachel an der Seitenfläche angeschuhet ist, der äusserste Punct des Ringes genau über die Spitze liegt.

16) Nachdem auch die Glieder gehörig auseinander gelegt; so setze man im **Anfangspunct** C der auszumessenden Linie CF, den einen Kettenstab vertikal, und lasse einen Gehülfen mit dem andern Kettenstab so weit die Kette reicht, bis A, gehen; Daselbst nun lasse man selbigen den andern Kettenstab vertikal so einstecken, daß die Kette straff ausgespannt ist, und der Kettenstab sich in der abgesteckten Vertikalfläche befindet, (10).

17) Hierauf nehme man die Kettenstäbe heraus, und setze in C wieder die Meßfahne oder dem Absteckestab, in A aber lasse man ein kleines etwa 8 Zoll langes, $\frac{1}{2}$ Zoll dickes, und mit einer Spitze versehenes Stäbgen (welches ein **Zeichenstäbchen** heißt) stecken.

18) Nun sezt man in A den Kettenstab, läßt den Gehülfen wieder so weit als die Kette reicht, gehen, und verfährt übrigens wie in 16 und 17.

19) Beträgt das lezte Stück BF der auszumessenden Linie keine ganze Kettenlänge; so läßt man den Kettenstab demohnerachtet über F hinaus, so weit die Kette reicht, gehörig einsetzen, (16) zählt hierauf an der ausgespannten Kette, wie viel Ruthen, Schuh ꝛc. das Stück BF hält.

20) Dieses Stück und die Kettenlängen, die man (nach 16, 17, 18,) zwischen CB erhalten hat, geben die Größe der Linie CF.

Man sehe übrigens Mayers practische Geom. 1. Th. §. 34 u. f.

34. Satz.

In A und B seyen zween Gegenstände, die sich in einer Horizontalebne befinden; man soll ihren **Abstand** oder ihre **Weite**, AB, finden, so wegen einer Hinderung dazwischen, (z. E. eines Flusses) nicht unmittelbar gemessen werden kann.

I. Fall.

Wenn sich ein Punct oder Stand, C, annehmen läßt, von dem man nach beyden Enden, A, B, der Weite AB messen kann.

Auflösung.

1) Man setze in C einen Stab vertical, und

2) messe die Weiten CA und CB;

3) Von

3) Von dieser trage man CA in der rückwärts verlängerten Linie AC, von C nach a; desgleichen CB in der Verlängerung von BC rückwärts von C in b; daß nämlich ACa, und BCb gerade Linien sind, und Ca = CA; Cb = CB;

4) Messe nun den Abstand der Puncte a, b, oder ab;

So wird ab = AB seyn:

Denn der

W. bCa = BCA (8. S. 4. B.)
Ca = CA
Cb = CB } (3. Aufl.)

Folglich

Δ bCa = Δ BCA (2. S.)

Also

ab = AB.

22. S. Zusatz.

Dieses Verfahren ist nur brauchbar, wenn sich die Weiten AC, CB, ungehindert rückwärts in der Horizontalebne, in der A, B liegen, tragen lassen.

Wenn sich daher hinter dem Stande C Verhinderungen finden, die das Zurücktragen der ganzen Linien AC, BC, nicht verstatten; so trage man einerley Stücke der gemessenen Weiten, z. E. die Hälfte, den dritten ꝛc. Theil, rückwärts von C in d, und e, so wird die Weite de, auch ein solches Stück von AB, z. E. die Hälfte, das Drittel ꝛc. seyn.

Denn

Denn gesezt

Cd wäre $= \frac{1}{2}$ AC,

Ce $= \frac{1}{2}$ BC;

so ist, (weil die Dreyecke Ced, CAB ähnlich (28. S.) und daher CA : AB = Cd : de)

CA : AB $= \frac{1}{2}$ CA : de

also:

CA : $\frac{1}{2}$ CA = AB : de (Ar. V. 34. I.)

Folglich

de $= \frac{1}{2}$ AB (Ar. V. 16.)

Lassen sich nicht einerley Stücke der gemessenen Weiten CA, CB, zurücktragen; so trage man dergleichen in den geraden Linien von C vorwärts in D und E; und DE, wird gleichfalls ein eben so grosses Stücke von AB seyn, als so große Stücke CD, CE, von AC, BC genommen worden sind.

Die Verfahren dieses Zusatzes fodern, daß de, oder DE, sehr genau gemessen werden; weil ein kleiner Fehler, den man dabey begienge, sich bey dem Schlusse auf AB vervielfältigte.

Hätte man z. E.

Ce $= \frac{1}{10}$ BC

Cd $= \frac{1}{10}$ CA

genommen; so ist auch

de $= \frac{1}{10}$ AB;

Wäre nun

de = 5 Ruthen

gefunden worden; so wäre

$\frac{1}{10}$ AB = 5 Ruthen;

also

$$AB = 10 . 5 \text{ Ruthen;}$$

Hätte man aber bey Messung der Weite de um 1 Zoll gefehlt; so betrüge dieser Fehler auf AB, zehnmal mehr; und man würde so AB zehn Zolle zu groß oder zu klein finden, nachdem man de um 1 Zoll größer oder kleiner gemessen hätte.

II. Fall.

Wenn man (fig. 86.) vom Stande C nur nach dem einen Gegenstand, A, aber nicht nach dem andern B, unmittelbar messen kann.

Auflösung.

1) Man messe die Weite CA; und

2) trage sie von C rückwärts nach a, daß A, C, a in gerader Linie liegen.

3) Nun trage man an a einen Winkel CaP = CAB;

Dieß geschiehet, mittelst des 10. Satzes auf dem Felde, so:

In p (fig. LXXXVI.) stecke man einen Stab mit A und B in einer Vertikalfläche, desgleichen in D einen mit A und C in gerader Linie; am besten so, daß Ap = AD oder Δ ADp gleichschenklicht ist.

Hierauf messe man Ap und AD, (oder nur AD, wenn Ad = AD genommen) wie auch Dp; so hat man die Seiten des Dreyecks ADp, welches

ches an a so getragen werden muß, daß der Winkel A an a komme.

Man nehme also von a auf aC die Linie ad = AD, und auf der Meßkette eine Länge, so groß als Ap + pD; dieser Länge Enden befestige man bey d und a, und spanne genannte Länge nach den Richtungen dP, Pa so aus, daß dP = Dp, und Pa = pA;

4) Hierauf gehe man mit einem Stabe in der Linie aP fort, bis man ihn in einem Punct, b, so stecken kann, daß er mit C, B sowohl als P, a in einer Vertikalfläche liege;

Alsdann ist man in BC oder Bb angelangt, und nun die Weite von b bis a gemessen, giebt

ab = AB.

Denn der

W. a = A (3)

bCa = BCA (8. S. 4. 3.)

Ca = CA (2)

Also:

△ bCa = △ BCA

Folglich

ab = AB.

34. S. II. Fall. Anm.

Nimmt man ..... Rechnung]

Nach Puehlers grundlichen anlaytung ist

$$AB = \frac{DE \cdot CA}{CD}$$

Nähme man nun CD so, daß es etlichemal, überhaupt n mal, in AC (wo n keine große Zahl) enthalten, also $AC = n \cdot CD$, ist; so ist

$$AB = \frac{DE \cdot n \cdot CD}{CD}$$

$$= n \cdot DE$$

Wäre

$$DE = 156°$$
$$AC = 96°$$
$$CD = 32°;$$

so ist

$$AC = 3 \cdot CD$$
$$= 3 \cdot 32°;$$

also $n = 3$, und man findet

AB durch $3 \cdot DE = 3 \cdot 156°$

viel geschwinder und leichter als durch

$$\frac{156° \times 96°}{32°}.$$

III. Fall.

Wenn man von dem angenommenen Stande, weder nach A noch nach B kommen kann.

Auflösung.

1) In diesem Falle wähle man sich einen andern Standpunct, so, daß man von diesem unmittelbar nach C messen kann; So hat man in Rücksicht der Puncte C, A, und C, B, oder der Weiten CA, CB, den vorigen zweyten Fall;

2) Man finde also, auf eben die Art, wie in

der

der Auflösung des II. Falls für AB gezeigt worden, erstlich die Weite CA, dann die CB;

3) Diese kann man wie im I. Falle von C zurück nach a, und b tragen, und so wie daselbst gezeigt wurde, ab = AB finden.

35. Satz.

1) Der **Meßtisch** (mensula Praetoriana) ist gemeiniglich ein wohl gehobeltes 1 Zoll dickes Bret von gutem Holze, in der Gestalt eines Quadrats dessen Seite 1 bis 1 $\frac{1}{2}$ Fuß.

2) Beym Gebrauch muß der Meßtisch mit weisen Pappier dergestalt überzogen werden, daß dieses alle Puncte des Tisches Oberfläche berühre; überdieß aber wird er auf ein **Gestelle** oder **Stativ** befestiget, um ihn eine bequeme Stellung zu geben.

3) Um nun mit dem Meßtisch Messungen anstellen zu können, bedient man sich gewöhnlich ein Lineal von Messing oder Birnbaumholz, das von einer Ecke bis zur gegenüberstehenden reicht.

4) An dessen beyden Enden sind zwo messingene Platten senkrecht auf des Lineals Ebne, gemeiniglich um Gelenke beweglich, angebracht, um längst ihnen hinaus nach einem gewissen Gegenstand, zu visiren.

Sie heissen **Absehen** oder **Dioptern.**

5) Die eine, wohinter das Auge zu liegen kommt, und daher **Okulardioptrer** genennt wird, hat

längst der Mitte herab einen zart eingeschnittnen Schlitz, durch den das Auge zielet. Dieser Schlitz darf weder zu weit noch zu enge seyn.

6) Die andere, die Objectivdiopter, hat hingegen eine etwas weite Oefnung, durch die der Länge herunter ein zarter Silberfaden oder Pferdehaar ausgespannt ist.

7) Der Enge Schlitz und der ausgespannte Faden müssen genau in einer Ebne liegen, die auf der Ebne des Lineals senkrecht steht.

8) Die gerade Linie in der sich beyde Ebnen schneiden, heißt die Alhidade, Ziellinie.

9) Ein solches Lineal nun heißt ein **Diopterlineal, Dioprerregel.**

10) Für den Meßtisch ist meist die Alhidade die Schärfe des Diopterlineals; oder diese Schärfe, muß genau in der Ebne, in 7, liegen.

11) Die Scheibe besteht, wie der Meßtisch, aus einem Brete, welches aber kreisförmig ist, und gleichfalls beym Gebrauch mit Papier überzogen wird. Uebrigens wird auf der Scheibe ein Diopterlineal, das um ihren Mittelpunct beweglich ist, so angebracht, daß die darauf längst der Alhidade gezogenen Linien durch den Umdrehungspunct gehen. —

Aufgabe.

12) Mit dem Meßtische ein Paar Linien auf dem Papiere zu ziehen, die eben den Winkel einschliessen,

schliessen, die ein Paar Linien auf dem Felde machen.

Auflösung.

13) C sey (fig. 87.) ein Punct auf dem Felde. Durch ihn stelle man sich eine Horizontalebne gelegt vor, über welche nach Gefallen bey A und B, sich zwey Objecte befänden, daß wenn man von ihnen auf diese Horizontalebne sich vertikale Linien dächte, diese daselbst in A und B einträfen;

So soll mittelst des Meßtisches ein Winkel angegeben werden, der dem horizontalen Winkel ACB auf dem Felde gleich ist.

14) In dieser Absicht nun, nehme man einen Punct c auf dem Meßtische an, und stelle ihn über C horizontal so, daß die Vertikallinie durch C, genau in dem Punct c einschneide.

15) Hierauf schlage man in c eine sehr feine Nehnadel ein, und lege an sie die Schärfe des Diopterlineals (9, 10);

16) Visire alsdann durch die Oculardiopter nach dem einen Gegenstand, nach den über A; wende das Lineal so lange um die Nadel herum, bis er gerade hinter dem im Objectivdiopter ausgespannten Faden gesehen wird, und ziehe nun längst des Lineals Schärfe an der Nadel, eine gerade Linie AC durch c, welche in der durch A, C, gehenden Verticalebne liegen muß.

17) Nun richte man die Diopter (4, 5, 6) nach den Gegenstand über B, und ziehe wiederum

auf dem Meßtische durch c längst der an der Nadel liegenden Schärfe des Lineals eine gerade Linie bc, welche ebenfalls in der durch B und C laufenden vertikalen Ebne liegen muß.

18) Der solchergestalt auf dem Meßtische erhaltene Winkel acb ist = ACB (46. S. 2. Z.)

19) Auf ähnliche Art verfährt man auch bey der Scheibe (11); welche aber, wie Herr Prof. Mayer zeigt, in der Feldmeßkunst, (wie die Eisenscheiben in der Markscheidekunst) entbehrlich sind.

35. Satz. 2. Zusatz.

Wäre (81. fig.) das △ abc auf dem Papiere dem △ ABC auf dem Felde ähnlich, und die Seite ab in jenen, nach dem verjüngten Maaße so groß als die ihm zugehörige, oder ähnlich liegende Seite AB, in diesem △ nach dem würklichen Maaße ist; so findet dieses auch bey ac, AC und bc, BC statt.

Denn da die Dreyecke ähnlich; so ist

$$ba : BA = ac : AC$$
$$= bc : BC$$

(27. S. Zus.), und folglich hält ac, bc nach dem verjüngten Maaße so viel, als AC, BC nach dem wirklichen.

35. Satz. 3. Zus. Anm.

So ist ac der AC (im 2. Z.) gemäß, weil ac so viel z. E. Ruthen nach dem verjüngten Maaße hält,

hält, als AC nach dem wirklichen. Wenn man also eine Linie bc auf dem Papiere, einer auf dem Felde, BC, gemäß machet, oder zieher; so macht man bc so viele Ruthen, z. E. nach dem verjüngten Maaßstabe lang, so viel, BC nach dem wirklichen Maaße enthält.

I. Fall.

.... so ist ab dem ..... gemäß]

Denn man erhält so den Winkel acb = ABC (35. Satzes Erl. 13. und 18.); und da ca der CA und cb der CB gemäß; so ist auch ca : cb = CA : CB;

Folglich das

Δ acb $\sim$ Δ ACB (28. S.)

Mithin ab der AB gemäß (35. S. 2. Z.)

II. Fall.

Nachdem man über C den Meßtisch so gestellt hat, wie es im 35. Satzes Erläuterung 15, oder im I. Falle d. Satzes, geschehen ist; so ziehe man auf ihm von c über C nach A zu (wie 35. S. Erl. 15, 16, 17) die gerade Linie ca der CA gemäß (35. S. Anm. Erl.); von c aber nach B zu, die Linie cp von unbestimmter Länge.

Nun trage man den Meßtisch über A dergestalt, daß der Punct a über A (wie vorhin c über C) und ac so zu liegen kommt, daß sie von A nach C zu *) ..... gemäß.

Denn man macht während dem Verfahren erst acp = ACB, dann cab = CAB (35. S. Erl.

*) S. Buch.

13 . . . . 18): Also sind die izt genannten Winkel in den Dreyecken cab, CAB gleich; folglich auch der dritte oder abc = ABC; also

$$\Delta \text{ abc } \backsim \Delta \text{ ABC (26. S.)}$$

Folglich

ab der AB gemäß

(weil es ac, AC sind; und 35. S. 2. Z.)

36. Satz. 2. Anm.

Um die Weite AE (91. fig.) zu deren beyden Enden A, E, man nicht kommen kann, aus dem einzigen Stande B zu finden, also dadurch dieses 36. S. III. Fall aufzulösen; so stecke man in D, F Stäbe in gerader Linie mit E, und überdieß noch in C einen Stab, der mit D und A sich in einer Verticalfläche befindet.

Nun ziehe man auf den Meßtisch von b, (so lothrecht über B,) nach D, C, F, A, E zu, die Linien bd, bc, bf, ba, be, und mache bd der BD, bc der BC, bf der BF, gemäß;

Hierauf ziehe man von A durch c und f die unbestimmten Linien dc, df, wovon jene, dc, die ba in a, und diese, df, die be in e schneiden wird.

Die Linie ae nun wird nach dem verjüngten Maaße so viel betragen als AE nach dem wirklichen.

Denn wegen des gemeinschaftlichen Winkels fbd = FBD, und weil man bd, bf der BD, BF gemäß, also bd : bf = BD : BF gemacht hat, ist das

Drey-

Dreyeck fbd ∽ Δ FBD (28. S.);
Also der Winkel
bdf = BDF
Folglich, auch
Δ bde ∽ BDE
(weil beyden der Winkel ebd = EBD gemein; und 26. S.)
Mithin:
be : BE = bd : BD;
Aber
ba : BA = bd : BD *)

Also:
be : BE = ba : BA
Nun ist der
W. abe = ABE (Verfahr.)

Folglich
Δ abe ∽ Δ ABE (28. S.)
Also
ae der AE gemäß (35. S. 2. Z.)

36. Satz. 3. Anm.

Die Folgen der in Messungen begangenen Fehler, findet man ausser den im Buche angeführten Büchern, auch in Herrn **Lamberts Beytr. zum Gebr. der Math.** I. Th. 229 u. f. S. und Herrn **Prof. Mayers pract. Geom.** XII. Cap. abgehandelt.

37.

*) Weil man ba der BA und bd der BD gemäß genommen.

37. Satz.

1) Das gemeine Astrolabium ist ein in seine 180° getheilter Transporteur (22. S. 7. Z. Erl.) von Messing, dessen Halbmesser gemeiniglich nur 4 bis 5 Zoll, wiewohl er wegen genaueren Eintheilung des **Randes** größer seyn und ohngefähr $\frac{3}{4}$ Fuß halten sollte.

2) An des Durchmessers Enden, der durch die Puncte 180° geht, sind zwo Dioptern oder Absehen angebracht (35. S. Erl. 4, 5, 6);

3) Um des Werkzeuges Mittelpunct bewegt sich ein Diopterlineal (35. Erl. 9), das an seinen beyden Enden mit zween Zeigern versehen ist, die in des Lineals und Randes Ebne liegen, deren scharfe Kannten genau in der Alhidade oder Ziellinie liegen müssen.

4) Das Astrolabium jedesmal bequem stellen zu können, verbindet man es gleichfalls mit einem Stativ.

Aufgabe.

5) Mit dem Astrolabio die Größe eines horizontalen Winkels ACB (87. fig.) auf dem Felde in Graden zu finden.

Auflösung.

6) Man setze das Astrolabium dergestalt über des vorgegebenen Winkels Scheitel C, daß des Werkzeuges Mittelpunct genau lothrecht über C zu liegen komme.

7) Hier-

7) Hierauf richte man die Objectivdiopter am Durchmesser (2) nach dem Gegenstand bey A, und wenn man diesen durchs Okulardiopter genau hinter dem Faden des Objectivdiopters sieht;

So richte man das Diopterlineal nach dem Gegenstande bey B, wobey das Instrument nicht verrückt werden darf; Erscheinet er genau hinter des Objectivdiopters Faden; So bemerke man auf dem Rande den wievielten Grad ꝛc. daselbst einer von den Zeigern am Diopterlineal (3) abschneidet.

Und so viel hält der vorgegebene Winkel (46. S. 2. Z. und 22. S. 5. Z.).

8) Wie ein in Grade ꝛc. gegebener oder gefundener Winkel, mittelst des gemeinen Transporteurs auf das Pappier zu verzeichnen ist, lehrt des 22. Satzes 7. Zusatzes Erläuterung.

Man erhält aber so keine große Genauigkeit. Der geradlinichte Transporteur, (davon unten in der Trig.) ist hiezu zuverlässiger.

38. Satz.

I. Fall.

.... woraus sich ..... zu wissen]

Nachdem ACB, und CA, CB gemessen worden, verzeichne man mit dem Transporteur den Winkel ACB auf das Pappier, der in der 87. Figur, bcb seyn mag;

Auf seinen Schenkeln ca, cb nun, nehme man ca der CA und cb der CB gemäß; ziehe ab, und

messe

messe sie nach eben dem verjüngten Maaßstabe, wonach man ca, cb maß;

So wird man ab der AB gemäß finden:

Denn aus dem Verfahren und 28. Satze erhellet, daß

$$\triangle abc \backsim ABC$$

woraus die Sache nach des 35. S. 2. Z. folgt.

II. Fall.

[. . . . geben ebenfalls . . . . . ähnlich ist]

Auf dem Pappiere nämlich ziehe man eine Linie ca, (88. fig.) der auf dem Felde gemessenen CA gemäß;

An ihre Endpuncte trage man die gemessenen Winkel, daß also der

$$W.\ cab = CAB$$
$$acb = ACB,$$

die Schenkel dieser Winkel werden einander in b schneiden;

Mißt man nun ac nach eben dem verjüngten Maasse, nachdem man es bey ac that;

So erhält man ab der AB gemäß.

Denn, da auch der

$$W.\ abc = ABC\ (13.\ S.)$$

so ist

$$\triangle abc \backsim ABC\ (26.\ S.)$$

woraus die Sache nach des 35. S. 2. Zusatze erhellet.

III.

III. Fall.

. . . . und ſetze in eben . . . . . gemäß iſt]

An c ſetze man den Winkel

acd = ACD,

und den

bcd = BCD;

an d hingegen den

W. adc = ADC

und den

bdc = BDC

So ſchneidet des Winkels acd Schenkel ca den Schenkel da des Winkels cda in a, und des Winkels bcd Schenkel bc den db des Winkels bdc in b.

Mißt man nun ab nach eben dem verjüngten Maaße, nach dem man cd der CD gemäß machte;

So erhält man ab der AB gemäß.

Denn das

$\left.\begin{array}{l}\Delta\ bdc \backsim \Delta\ BDC\\ \Delta\ adc \backsim \Delta\ ADC\end{array}\right\}$ (Verf. und 26. S.)

Alſo in jenem, bd der BD gemäß (Verf. und 35. S. 2. Z.), und

bd : dc = BD : DC

in dieſem

dc : ad = DC : AD

Alſo

bd : ad = BD : AD

Folglich iſt das

Δ adb ∽ ADB

weil

(weil beyden der Winkel adb = ADB gemein; 28. S.)

Mithin ab der AB gemäß (35. S. 2. Z.)

38. Satz. Anm.

.....mit der Trigonometrie verbunden]

Durch diese erhält man das Gesuchte weit genauer, so genau als möglich, wenn man nur gehörig verfährt und zum Messen ein gutes Astrolabium hat, wie das, so Herr Prof. Mayer in seiner practischen Geom. §. 99. beschreibt, und das vollkommenste so man bisher kennt, ist.

38. Satz. 1. Zusatz.

Kann man von ..... zu haben]

1) Wenn man von einem angenommenen Stande nach der Höhe AB untern Ende A horizontal hinmessen kann; so stelle man das Astrolabium dergestalt vertical in D über C, daß dessen Mittelpunct lothrecht über C, sein Durchmesser horizontal, (also in DE, weil DE horizontal angenommen) liege.

2) Nun visire man mit dem beweglichen Dioptrlineale nach B; und wenn B genau hinter des Objectivdiopters Faden erscheinet, wird der Zeiger am Lineal des vorgegebenen **Verticalwinkels** BDE, Anzahl Grade auf dem Rande des Instruments abschneiden.

3) Hierauf messe man CA, (= DE);

4) Ziehe an dem Pappiere eine Linie, der CA gemäß.

5) An

5) An das eine Ende dieser Linie setze man den gemessenen Winkel, durch das andere aber einen Perpendikel; dieses und des gezeichneten Winkels Schenkel, schneiden einander.

7) Das Stück des Perpendikels zwischen diesem Durchschnittspunct, und dem andern Endpunct (durch den das Loth geht) der CA gemäßen Linie, nach eben dem verjüngten Maaßstabe gemessen, findet sich der BE gemäß. (26. S. und 35. S. 2. Z.)

8) Addirt man nun zu dem gefundenen Maaße der Linie BE das der Höhe des Werkzeugs, oder der Linie DC = EA, so erhält man, wie hoch BA ist.

38. Satz. 2. Zusatz.

Die Winkel ..... Instruments addiret]

Man messe nämlich aus D den Winkel BDE und aus G den BGE, (wie im vor. Zus. Erl. 12 ist gezeigt worden); überdieß die Weite DG der angenommenen Stände D, G, oder die Standlinie DG.

Nun ziehe man auf dem Pappiere eine Linie der DG gemäß, und setze an den einen Endpunct einen Winkel = BGD, und an den andern Endpunct einen Winkel, = BDE, oder (wie hier in der Figur 90) = dessen Nebenwinkel BDG, als den innern Winkel des Δ DBG;

So entsteht auf dem Pappiere ein Dreyeck, das dem Δ DBG ähnlich (26. S.) und wo die der DG gemäße Linie, die Grundlinie, ist.

Hierauf fälle man von dieses Δ Spitze auf seine Grundlinie ein Loth, und messe solches nach eben dem verjüngten Maaßstabe, nach dem man GD maß. Dieses Loth wird der BE gemäß seyn.

Addirt man daher zu den so gefundenen Maaße das Maaß des Werkzeugs Höhe; so erhält man die verlangte Höhe BA.

Ich setze ꝛc. (S. Buch.)

40. S. I.

... so kann man nun ... beschreiben (28. S.)]

Man nimmt nämlich auf dem Pappiere einen Punct f an, trägt an diesen die bey F gemessenen Winkel, und macht ihre Schenkel den gemessenen Seiten, in der Ordnung wie sie auf einander folgen, gemäß;

Also (92. fig.) fa der FA; fb der FB ꝛc. gemäß.

40. S. II.

I) Man braucht hier entweder 1) alle Seiten aber nicht alle Winkel, sondern drey Winkel weniger als die Figur enthält; oder 2) alle Winkel und zwo Seiten weniger als die Figur begränzen, richtig zu messen, wie die Folge zeigen wird.

II) Mißt man alle Seiten und alle Winkel; so dienen die übrigen gemessenen Stücken zur Probe.

III) Hat man also im Fünfeck der 92. Figur, alle Seiten AB, BC, CD, DE, EA, und die zween Winkel EAB, ABC, richtig gemessen;

IV) So nehme man, um diese Figur in Grund zu legen, auf dem Pappiere einen Punct, a, an, und setze daran den Winkel eab = EAB; mache die Schenkel ea, ab dieses Winkels den Schenkeln EA, AB gemäß; setze hierauf an b den Winkel abc = ABC, und mache bc der BC gemäß.

V) Nun ziehe man mit Bleystift die gerade Linie ec, und beschreibe über sie ein Dreyeck edc, dessen übrige zwo Seiten cd, ed, nach dem verjüngten Maaße so groß als CD und ED nach dem wirklichen sind.

VI) Hat man alle Winkel EAB, ABC, BCD, CDE, DEA, und die drey Seiten EA, AB, BC, richtig gemessen; so verfahre man anfangs wie in IV dieser Erläuterung, ist gezeiget worden;

VII) Alsdann aber setze man an c den Winkel bcd = BCD, und an e den aed = AED, beyder Schenkel werde sich in d schneiden, und die Figur auch so in Grund gelegt seyn.

VIII. Bedienet man sich des Meßtisches; so erhält man die Figur gleich von selbst.

Daß die entworfene Figur der auf dem Felde ähnlich sey; erhellet, weil in beyden einerley Winkel in einerley Ordnung aufeinander folgen, auch proportionirte Seiten, indem man die gezeichneten den auf dem Felde gemäß gemacht hat.

40. Satz. III.

I) Wollte man mittelst des Meßtisches die Fi-

gur EFBA (92. fig.) aus den zween Ständen D, C oder der einzigen Standlinie DC, (die nach Gefallen angenommen werden kann, wenn man nur aus D, C, die ganze Figur übersehen kann) in Grund legen; so verfährt man nach des 36. S. III. Fall, auf folgende Art:

Man sezt den Meßtisch über den einen Standpunct, D, und zieht darauf aus dem lothrecht über d liegenden Puncte, (so d heißen mag) nach allen Puncten E, F, B, A der Figur, und auch nach C, gerade Linien.

Mißt die Standlinie DC, und nimmt von d nach dem verjüngten Maaße auf die nach C gezogenen Linie so viel z. E. Ruthen, als DC nach dem wirklichen beträgt; so wird man dadurch auf dem Meßtisch in gedachter Linie noch einen Punct bestimmen, der c heißen mag, daß also dc *) der DC gemäß.

Nun sezt man den Meßtisch über C, so daß c lothrecht über C und cd, längst CD zu liegen kömmt.

Zieht hierauf aus c nach allen Puncten E, F, B, A, in der Ordnung wie vorhin aus d, gerade Linien: so werden diese die vorhin aus d gezogenen schneiden.

Diese Durchschnittspuncte aber, geben auf dem Meßtische die Lage von E, F, B, A auf dem Felde, so

*) Welche Linie man sich auf dem Meßtisch gezogen und diesen selbst über D gestellt, denken muß.

so daß erstere (die Durchschnittspuncte) gegen dc eben die Lage haben, als leztere (E, F, B, A) gegen DC.

Zieht man nun gedachte Durchschnittspuncte mit geraden Linien zusammen; so erhält man eine Figur, die der auf dem Felde ähnlich ist.

Auf ähnliche Art verfährt man auch mit dem Astrolabio.

Ueberhaupt: Wer von alle dem was bisher aus der Feldmeßkunst gesagt worden ist, ausführlichen und gründlichen Unterricht verlangt, der findet ihn in Herrn Prof. Mayers schon mehrmalen erwähntem practischen Geometrie.

41. Satz. 3. Zusatz. VII.

Nun ..... $< \frac{2\,FI}{FE}$]

Da

$$\Delta\, IAB : \Delta\, AEB = FI : FE$$

so ist

$$\frac{\Delta\, IAB}{\Delta\, AEB} = \frac{FI}{FE}$$

Also:

$$\frac{2\,\Delta\, IAB}{\Delta\, AEB} = \frac{2 \cdot FI}{FE}$$

Aber $2\,\Delta$ IAB $>$ der Abschnitt AIBFA.

Folglich

$$\frac{\text{der Abschn. AIBFA}}{\Delta\, AEB} < \frac{2 \cdot FI}{FE}$$

42. Satz. 1. Zusatz.

Hieraus hat man die Regel zur Findung des **Flächeninhalts** jedes Rechtecks, dessen Seiten sich mit einerley Maaß messen lassen. Nämlich:

Wenn man die zwo Zahlen, welche die Länge der nach einem bekannten Maase gemessenen Seiten des Rechtecks ausdrücken, mit einander multipliciret; so giebt das Product den Flächen Inhalt des Rechtecks, d. i. eine Menge von Quadraten, die das Rechteck enthält, und von den jedes Seite so lang als das gebrauchte Längenmaaß ist.

Wäre zum Exempel in der 96. fig. AF, = AE, = 1′ also AC = 4′, und AB = 7′; so würde dieses Rechtecks AD Flächeninhalt = 7 × 4 = 28 solcher Quadrate seyn davon jedes Seite = 1 Fuß ist.

Diese Regel gilt auch wenn eine Seite in Vergleichung mit der andern eine Irrationalzahl ist, wie der 3. Zus. darthut.

Also ist diese Regel allgemein.

42. Satz. 4. Zusatz.

Dieser Zusatz giebt die Regel, den Flächeninhalt eines Quadrats zu finden, an.

Er sagt so viel:

Wenn man die Zahl, welche die Länge der Seite des Quadrats, nach einem bekannten

ten Maaße gemessen, ausdruckt, mit sich selbst multipliciret, so giebt das Product, den Inhalt, oder die Menge der Quadrate, die jenes enthält, und von den die Seite gleich der Länge des gebrauchten Maaßes ist.

Wäre z. E. des Quadrats Seite $= 7''$; so ist sein Inhalt $= 7 \times 7 = 49$ solcher Quadrate, von den die Seite $= 7''$; d. h. der Inhalt ist $= 49$ Quadratzolle.

Hieraus wird man auch die Ursache einsehen, warum in der Arithmetik das Product, zwoer gleichen Zahlen, eine Quadratzahl genennt wird.

41. Satz. 8. Zusatz.

Folglich ꝛc.]

Weil 100 gevierte Linien oder Quadratlinien $=$ 1 Quadratzoll; so ist $\frac{1}{100}$ Quadratzoll $=$ 1 Quadratlinie.

Eben so ist 1 Quadratzoll $= \frac{1}{100}$ Quadratfuß,

1 Quadratfuß $= \frac{1}{100}$ Quadratruthe; denn 100 Quadratzoll $=$ 1 Quadratfuß; 100 Quadratfuß $=$ 1 Quadratruthe.

Daher ist im Quadratmaaße

$$12436728''' = 12436728 \cdot \frac{1}{100}''''$$

$$= 124367'';$$

$$= 124367'', 28$$
$$= 124367'' 28'''$$

(weil $\frac{28''}{100} = 28'''$); Aber

$$124367'' = 124367 \cdot \frac{1'}{100}$$
$$= 1243', 67$$
$$= 1243' 67''$$

und

$$1243' = 1243 \frac{1^\circ}{100}$$
$$= 12^\circ, 43$$
$$= 12^\circ 43'$$

Folglich

$$12436728''' = 12^\circ 43' 67'' 28'''$$

42. Satz. 8. Zusatz. Anm.

Wäre des Rechtecks AD (96. fig.) Seite AB $= 7^\circ 2'$ und AC $= 3^\circ 2' 4''$ Decimalmasses; so würde sein Inhalt $= 7^\circ 2' \times 3^\circ 2' 4''$ seyn.

Da aber

$$7^\circ 2' = 7^\circ + \frac{2^\circ}{10}$$
$$= 7^\circ, 2 \text{ (32. S.)}$$

und

$$3^\circ 2' 4'' = 3^\circ + \frac{2^\circ}{10} + \frac{4}{100}{}^\circ \text{ (32. S.)}$$
$$= 3^\circ, 24$$

so erhält man auch den Inhalt durch das Product

$7^\circ, 2$

$7°,2 \times 3°,24 = 23°,328$ im Quadratmaaße. Dieses Product ist auch

$$= 23°,3280$$

$$= 23° + \frac{32°}{100} + \frac{80°}{10000}$$

$$= 23° 32' 80'' \text{ Quadratmaaß}$$

(weil $\frac{1}{100}$ Quadratruthe $= 1$ Quadratfuß; $\frac{1}{10000}$ Quadratruthe $= \frac{1}{100}$ Quadratf. $= 1$ Quadratz.)

Man braucht also bey Decimalmaaß die höhern Maasse nicht erst auf niedrigere zu bringen, sondern kann das höchste (wie im 6 ꝛc. die Ruthe) zur Einheit annehmen, von der alsdann die niedrigern zehntheilichte Brüche sind, und das Product nach den Regeln der Multiplication mit Decimalbrüchen, suchen. Die Ganzen enthalten die Quadrate der angenommenen Einheit, in unserm Exempel Quadratruthen, und die nach ihnen folgenden Decimalbrüche, stellt man sich, von der Linken gegen die Rechte in Klassen getheilt vor, von den jede zwo Ziffern enthält, und welche nach einander Quadratfüße, Quadratzolle, ꝛc. bedeuten, wenn wie in unsern Exempel die Einheit eine Quadratruthe ist; wäre sie ein Quadratfuß; so hätte man Quadratzolle, Quadratlinien, u. s. w.

In unserm Exempel war die Anzahl der Decimälstellen, ungerade: deshalb und wegen der gedachten Eintheilung sezte man hinter der lezten

Ziffer eine 0 welches bekantermaaßen den Werth der Zahl nicht ändert. Dies hat man bey ungerader Anzahl der Decimalstellen allemal zu befolgen.

42. Satz. 9. Zusatz.

Mittelst dieses und des 8. Zusatzes läßt sich leicht das Decimalquadratmaaß auf Duodecimalquadratmaaß, und umgekehrt, bringen.

Dieß geschieht durch die Regel Detri, wobey man sich erinnern muß, daß bey einerley Ruthenmaaß,

100 Decimalquadratfuß = 144 Duodecimalquadratfuß

bey einerley Fußmaaß

100 Decimalquadratzoll = 144 Duodecimalquadratzoll

bey einerley Zollmaaß:

100 Decimalquadratlinien = 144 Duodecimalquadratlinien

u. s. w. sind.

Exempel.

12′ 15″ Decimalquadratmaaß in Duodecimalquadratmaaß zu verwandeln.

Man nenne das Gesuchte x, und schließe:

$$100' : 12', 15 = 144' : x$$

Also:

$$x = \frac{12,15 \cdot 144}{100} \text{ Duod. Q. F.}$$

$$= 1749,$$

$$= \frac{1749,60}{100}$$

= 17, 4960 Duodecq. F.

Aber

0, 496 Duodecq. F. = 0, 496 × 1 Duodecimalquadratfuß
= 0, 496 × 144 Duod. Q. Z.
= 71, 424 Duod. Q. Z.

und

0, 424 Duod. Q. Z. = 0, 424 × 144 Duod. Q. L.
= 61, 056 Duod. Q. L.

Folglich:

12′ 15″ Decimalquadratmaaß
= 17 Duod. Q. F. 71 Duod. Quad. Z. 61, 056 Duod. Q. L.

Umgekehrt:

135 Duod. Q. F. 133 Duod. Q. Z. in Decimalquadratmaaß zu verwandeln.

Man nenne das Gesuchte auch x, und schließe

144 Duod. Q. F.: 135 Duod. Q. F. 133 Duod. Q. Z. = 100 Dec. Q. F.: x; oder

144 × 144 Duod. Q. Z.: 135 × 144 + 133 Duod. Q. Z. = 100 Dec. Q. F.: x; d. i.

20736 Duod. Q. Z.: 19573 Duod. Q. Z. = 100 Dec. Q. F.: x

Also:

Also:

$$x = \frac{19573 \times 100}{20736} \text{ Dec. Q. F.}$$

Bey dergleichen Rechnung kann man sich in vielen Fällen (wie hier hätte geschehen können) mit Vortheil der Logarithmen bedienen.

Eine andere Methode der Verwandlung der Quadratmaaße, lernt man aus Mayers practischen Geometrie. I. Th. §. 25. u. f.

Zuweilen kann auch der Fall vorkommen, wo man die Zahlen der Quadrate verschiedener z. E. Fußmaße auf einander zu reduciren, z. B. eine Menge Rheinländischer Quadratfüße auf Pariser zu bringen, hat.

Hiezu nimmt man eine Vergleichungstafel der Fußmase zur Hand, und quadrirt die Zahlen, die man darinne für die vorgegebenen Zahlen findet. Die gefundenen Quadratzahlen nun, verhalten sich selbst, wie die Quadrate der Maaße, den sie zugehören.

Soll man z. E. 597 Rheinländische Quadratfuße auf Pariser Quadratfuße bringen; so schließt man, da 13913 Pariser Fuß = 14400 Rheinl. F.

14400^2 Rheinl. F. : 597 R. Q. F. =
13913^2 P. F. : x

Hiezu kann man auch mit Vortheil die Logarithmen gebrauchen; und man sieht leicht, wie die Rechnung zu führen ist.

42. Satz. 10. Zusatz.

Da

$$AC = \sqrt{(BC^2 - AB^2)}$$

so hält auch AC von dem Maaße, mit dem BC und AB gemessen worden, so viel, als die Wurzel aus der Differenz der Quadrate der Hypothenuse BC und des einen Catheten AB, angiebt.

Man sieht, wie man hieraus, wenn die Hypothenuse und der einen Cathete in Zahlen gegeben sind, den andern, so, wie mittelst dieses 10. Zus. selbst, aus den in Zahlen gegebenen Catheten, die Hypothenuse, durch Rechnung finden kann.

42. Satz. 11. Zusatz.

Aus dem 10. Zus. u. d. Erl. lassen sich Irrationalzahlen, durch Linien darstellen.

Ein Exempel findet sich schon im Buche. Will man aber zum fernern Beyspiel $\sqrt{3}$ durch eine Linie darstellen, so muß man aus den Quadraten zwoer Linien BC, AB, wovon die eine $BC = 2$, die andere $AB = 1$, das Quadrat von A (61. fig.) die Differenz jener Quadrate suchen, welches Quadrats Seite, das verlangte seyn wird; denn, da

$$AC = \sqrt{(BC^2 - AB^2)} = \text{so ist auch}$$
$$AC = \sqrt{(2^2 - 1^2)}$$
$$= \sqrt{3}.$$

Will man hingegen $\sqrt{5}$ geometrisch darstellen, so sucht man aus den Quadraten zwoer Linien AC, AB, von den $AC = 1$, $AC, = 2$, das Quadrat

der

der Summe jener Quadrate BCq, welches Seite, $= \sqrt{5}$ seyn wird; Oder: man sezt AC, AB im rechten Winkel bey A (fig. 61.) zusammen, und zieht durch ihre Endpuncte B, C, welche bestimmt sind, die Hypothenuse BC: Diese wird das Verlangte ebenfalls seyn.

Denn da

$$BC = \sqrt{(AB^2 + AC^2)}$$

so ist

$$BC = \sqrt{(2^2 + 1^2)} = \sqrt{5}.$$

Man kann auch zum Exempel die $\sqrt{5}$ geometrisch, oder durch eine Linie auf die Art darstellen, daß man zwischen zwo Linien AB, BC, wovon die eine, AB, $= 1$ und die andere, BC, $= 5$, die mittlere geometrische Proportionallinie BD (84. fig.) sucht (31. S.), welche die $\sqrt{5}$ darstellet.

Denn, da

$$BD = \sqrt{AB : BC}$$

so ist

$$BD = \sqrt{1 \cdot 5} = \sqrt{5}.$$

So kann man also auch jede Irrational durch Linien darstellen; und man erhält so ebenfalls das Ganze auf einmal, oder bestimmt seine Gränzen, welches man durch die Arithmetik nicht bewerkstelligen kann, da man dort des Ganzen Theile nur nach und nach sucht, und sie folglich nie alle sind, so bald ihre Menge unendlich ist. Z. B. der $\sqrt{5}$

Theile

Theile kann man arithmetisch nie alle finden, auf so viel Decimalstellen man auch die $\sqrt{5}$ (Ar. IV. 27) sucht.

42. Satz. 13. Zusatz.

Zu Findung des Inhalts eines schiefen Parallelogramms, muß also allemal eine Seite (BC, fig. 55.) als Grundlinie, und das Perpendikel (EG) auf sie von irgend einen Punct (G) der gegenüber stehenden Seite, oder dessen Höhe, in Zahlen gegeben seyn, oder erst gemessen werden. Das Product dieser beyden Zahlen ist der verlangte Inhalt.

42. Satz. 14. Zusatz.

So hat (fig. XXXVI.) das Rechteck ABCD einen größern Inhalt als das schiefe Parallelogram, dessen Seite $Be = AB$.

Denn, da $EB > AB$ (9. S. 10. Z.) so ist auch $eB < EB$, und daher fällt e unter AD. Man verlängere die Seite ef des Parallelog. eC, bis sie AB in a schneidet, so haben eC und das Rechteck aC einerley Grundlinie und Höhe und sind daher gleichen Inhalts (14. S. 1. Z.). Aber aC ist offenbar $<$ als AC. (Vor. 8. u. d. E.) Folglich auch $eC < AC$.

42. Satz. 15. Zusatz.

Den Inhalt eines Dreyecks zu finden, wenn seine Grundlinie und Höhe nach einem bekannten Mase in Zahlen gegeben sind.

Es sey daher:

Ge-

Gegeben

Des △ ACD Grundlinie CD und Höhe Aa.

Man sucht

den Inhalt des △ ACD.

Da das △ ACD die Hälfte eines Parallelograms ist, das mit ihm gleiche Grundlinie CD und Höhe Aa hat, (14. S. 3. Z.) dieses Parallelogramms Inhalt aber = Aa . CD; so ist des Dreyecks ACD Inhalt

$$1) = \frac{Aa \times CD}{2}, \text{ oder}$$

$$2) = \tfrac{1}{2}\, Aa \times CD, \text{ oder}$$

$$3) = \tfrac{1}{2}\, CD \times Aa$$

Die Formel bey 1) dienet, besonders wenn Aa und CD in ungeraden Zahlen ausgedrückt sind; die bey 2) hingegen, braucht man mit Vortheil, wenn Aa durch eine gerade Zahl, so wie die bey 3) wenn CD in einer geraden Zahl gegeben ist.

Exempel.

Für 1) sey Aa = 5′ 5″, CD = 7′ so ist des △ ADC Inhalt

$$= \frac{5',5 \times 7'}{2}$$

$$= \frac{38,5}{2} = 19,25 \text{ Dec. Q. F.}$$

Für 2) sey

Aa = 4′ 4″, CD = 9′

so

so ist der Inhalt

$= \frac{1}{2} \cdot 4', 4 \times 9$

$= 2, 2 \times 9$

$= 19, 8$ Dec. Q. F.

Für 3) sey

$CD = 36' 6''$; $Aa = 25' 5''$;

so hat man zum Inhalte

$= \frac{1}{2}\, 36', 6 \times 25, 5$

$= 18, 3 \times 25, 5$

$= 466' 65''$ Dec. Q. Maaß.

Der 21. Satz der ebnen Trigonometrie lehrt eine Methode den Inhalt eines Dreyecks aus seinen Seiten zu finden.

42. Satz. 16. Zusatz.

Ein Vieleck, wie z. E. das irreguläre Fünfeck AEDCBA (XXXVII. fig.) auszurechnen, verfährt man so:

Man zieht Diagonalen AD, BD, wodurch es in Dreyecke AED, ADB, BDC, zerlegt wird;

Sieht diese Diagonale als die Grundlinie der Dreyecke an, und läßt von den gegenüber stehenden Spitzen, auf sie oder ihre Verlängerung (wie bey DA) die Höhen Ee, Bd, Cc, herab, aber wegen Verkürzung der Rechnung so, daß man die Diagonale DA, die zweyen Dreyecken, AED, ADB, gemein ist, für ihre gemeinschaftliche Grundlinie annimmt, und darauf ihre Höhen Ee, Bd, fällt.

Nun messe man die Höhen, Ee, BD, Cc und Grundlinien AD, BD, und berechne nach dem 15.

Zuſ. jedes Dreyecks AED, BAD, BDC Inhalt; die Summe dieſer Dreyecke giebt das Verlangte.

Denn

$$AEDCBA = \Delta AED + \Delta BAD + \Delta BDC,$$

Aber:

$$\Delta AED = \frac{Ee \times DA}{2}$$

$$\Delta ADB = \frac{Bd \times DA}{2}$$

$$\Delta BDC = \frac{BD \times Cc}{2}$$

Folglich dieſes irregulären Fünfecks Inhalt

$$= \frac{Ee \times DA}{2} + \frac{Bd \times DA}{2} + \frac{BD \times Cc}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}([Ee + Bd]\, DA) + \tfrac{1}{2}\, Cc \,.\, BD.$$

Exempel.

Es ſey

$DA = 4', 5''$
$DB = 5', 2''$
$Ee = 2'$
$Bd = 3', 1''$
$Cc = 2', 4''$

ſo iſt

$\tfrac{1}{2}([Ee + Bd]\, DA)$, $[= \Delta AED + \Delta ADB]$

$= \tfrac{1}{2}([2' + 3', 1]\, 4', 5)$

$= \frac{5', 1 \,.\, 4', 5}{2}$

$= 22,$

$= 22,95$ Dec. Q. F.

$\frac{1}{2}Cc \times BD = \frac{1}{2} \cdot 2',4 \times 4,5$

$= 1',2 \times 4,5$

$= 5,4$ Dec. Q. F.

Also des Fünfecks ABCDEA Inhalt

$= 22,95 + 5,4$

$= 27,99$ Dec. Q. F.

42. Satz. 17. Zusatz.

Nach des 23. Satzes 10. Zusatz ist jedes ordentliche Vieleck einem Dreyecke gleich, dessen Höhe des Vieleckshöhe, und die Grundlinie des Vielecks Umfang.

Wenn daher in einem regulären Vieleck (fig. 77.) die Höhe $= KQ$ ist; so ist der Inhalt

$= \frac{1}{2} KQ \times$ Umfang des Vielecks

Aber der Umfang ist $=$ der Summe aller Seiten des Vielecks, also $= AB + BC + \ldots\ldots + FA$, so viel auch Seiten seyen mögen. Nun sind in einem regulären Polygon alle Seiten einander gleich, also alle $= AB$, folglich ist diese Summe, oder des Vielecks Umfang $=$ dem Producte der einen Seite AB, in die Anzahl der Seiten. Setzt man diese Anzahl $= m$, so ist des Vielecks Umfang $= m \cdot AB$, folglich sein Inhalt

$= \frac{1}{2} KQ \cdot m \cdot AB$

$= KQ \cdot \frac{m}{2} AB$

$= \frac{1}{2} AB \cdot m \cdot KQ.$

Exempel.

Es sey

$KQ = 5' 6''$

$m = 10$

$AB = 2' 3''$;

so ist dieses regulären Zehnecks Inhalts

$= 5', 6 . \frac{10}{2} . 2', 3$

$= 5', 6 . 5 . 2', 3$

$= 57', 68$ Dec. Q. Maaß, oder

$= 57$ Dec. Q. F. 68. Dec. Q. Z.

42. Satz. 18. Zusatz.

Ein Trapezium von dem nicht zwo Seiten gleichlaufend sind, rechnet man nach dem 16. Zusatze aus.

Sollte also des Trapeziums (fig. XXXVIII.) ABDC, (von den nicht zwo Seiten gleichlaufend sind) Inhalt gefunden werden; so ziehe man die Diagonale BD, fälle darauf aus A und C, der Dreyecke ABD, CBD Höhen Ae, Cf; messe sie und BD: so giebt die Summe der beyden Dreyecke des Trapeziums Inhalt; Also hat man, (da

$$ABD = \frac{Ae \times BD}{2}$$

$$BDC = \frac{Cf \times BD}{2}$$

diesen Inhalt

$$= \frac{Ae \times BD}{2} + \frac{Cf \times BD}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2} BD\,(Ae + Cf)$$

Wer

Wer das bisherige begriffen hat, wird sich nun leicht selber Exempel machen können.

42. Satz. 19. Zusatz.

..... etwa durch zween Winkel AE]

Hiezu kann man die zween Winkel BAb, NEn nehmen, die am weitesten von einander entfernet sind.

..... weil ..... braucht]

Weil man nur den Abstand jeder zwo Seiten, wie Bb, Cc,; d. i. das Stück der Linie AE, das zwischen den zwo Seiten Bb und Cc inne liegt, zu messen, diesen Abstand alsdann mit der halben Summe der zwo Seiten (mit $\frac{1}{2}$ (Bb + Cc) wenn die Seiten Bb, Cc sind,) zu multipliciren (18. Zus.) braucht. Ueberdieß dient auch die eine der Seiten, zu einer des nächst folgenden Trapeziums.

.... durch verschiedene Handgriffe ꝛc.]

Z. E. Wenn man die eine Seite, etwa die Hypothenuse eines von Holz, Helfenbein ꝛc. gemachten rechtwinklichten Dreyecks edf, an das Perpendikel bB legt, und an eine der andern Seite ef, ein Liniel AD, dieß mit der einen Hand fest hält, und mit der andern das Dreyeck so weit herab schiebet, bis die Hypothenuse (oder deren Verlängerung) durch C geht; so kann man durch C mit Bb eine Parallele Cc ziehen.

Der Beweis hievon fällt in die Augen.

42. Satz. 20. Zusatz.

..... daß die Krümmung unmerklich wird]

Man sieht alsdann die kleinen Stückgen fm, md, ꝛc. als gerade Linien, an, und, nachdem von diesen Puncten auf AE, die Perpendikel gezogen sind, verfahrt man mit der Rechnung wie vorhin.

42. Satz. 21. Zusatz.

Aehnliche Dreyecke verhalten sich wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten.

Bedingung.

Es seyen die Dreyecke ABC, abc (45. fig.) ähnlich:

Behauptung.

$$\Delta ABC : \Delta abc = ACq : acq = ABq : abq = BCq : bcq$$

Vorbereitung.

Man ziehe dieser Dreyecke Höhen BD, bd; So ist

Beweis

$$\Delta ABC = \frac{BD \cdot AC}{2}$$

$$\Delta abc = \frac{bd \cdot ac}{2}$$

Also:

$$1) \Delta ABC : \Delta abc = \frac{BD \cdot AC}{2} : \frac{bd \cdot ac}{2}$$

$$= BD \cdot AC : bd \cdot ac,$$

Weil

Weil nun der Winkel

$A = a$ (Bed.)

$D = d$ (Vorb.

so ist

W. $ABD = abd$ (13. S.)

und die Dreyecke ähnlich; (27. S. Z.) oder

$\Delta ABD \sim$ *) Δabd

Folglich:

$BD : bd = AB : ab$

$AB : ab = AC : ac$

Also:

$BD : bd = AC : ac$

Mithin:

$BD \cdot ac = bd \cdot AC$ (Ar. V, 31.)

oder

$$BD = \frac{bd \cdot AC}{ac}$$

Nun setze man in die Proportion bey I) den für BD gefundenen Werth, so hat man

$$\Delta ABC : \Delta abc = \frac{bd \cdot AC}{ac} \times AC : bd \cdot ac$$

$$= bd \cdot AC \cdot AC : bd \cdot ac \cdot ac$$

$$= AC \cdot AC : ac \cdot ac$$

$$= ACq : acq$$

Da ferner

$AC : ac = AB : ab = BC : bc$ (Bed.)

$BD : bd = AB : ab = BC : bc$

---

*) Das Zeichen der Aehnlichkeit.

so ist

$$AC \cdot BD : ac \cdot bd = AB \cdot AB : ab \cdot ab = BC \cdot BC : bc \cdot bc$$

(Ar. V. 50) oder

$$\frac{AC \cdot BD}{2} : \frac{ac \cdot bd}{2} = ABq : ab_q = BCq : bc_q$$

d. i.

$$\Delta ABC : \Delta abc = ABq : ab_q = BCq : bc_q.$$

Dieß drückten die alten Geometer so aus: Triangula similia sunt etc. (S. Buch.)

42. Satz. 23. Zusatz.

So sind (fig. 93.) AD, ad; BD, bd, Linien, die in den ähnlichen Figuren AEDCBA, aedcba, auf ähnliche Art erzeugt worden, indem sie zwischen den Spitzen gleichnamiger Winkel gezogen sind. Auf solche Art in ähnlichen Figuren bestimmte Linien heisen **ähnlichliegende Diagonalen.**

Es ist aber

1) $AD : da = EA : ea = DE : de$, ꝛc.

2) $BD : bd = AD : ad$, ꝛc.

Denn weil die Figuren ähnlich seyn sollen, so muß

$E = e$

$EA : ea = ED : ed$ (19. Erkl.)

Also

$\Delta AED \backsim \Delta aed$ (28. S.)

seyn; und hieraus hat man die Proportion bey 1).

Fer-

Ferner: da

AB : ab = EA : ea (19. Erkl.)
EA : ea = AD : ad (1)

---

so ist

AB : ab = AD : ad

Ueberdieß, da

W. DAB = dab (weil der Winkel EAB = eab (19. Erkl.) und die Dreyecke EAD, ead ähnlich, daher der Winkel EAD = ead, und folglich DAB = dab)

so ist auch das

△ ADB ∽ △ adb

woraus 2) folgt.

Wenn die Figuren der 92. Figur ähnlich sind, so sind die Linien FC, fc; FB, fb ꝛc. auf ähnliche Art bestimmte Linien, indem sie von ähnlich liegenden Puncten F, f (39. S.) nach den Spitzen gleichnamigter Winkel gezogen sind.

Hier ist

fc : FC = dc : DC ꝛc.
fb : FB = bc : BC ꝛc.

wie man leicht einsieht.

42. Satz. 24. Zusatz.

Aus dem Inhalte und der Grundlinie eines Dreyecks, seine Höhe zu finden.

Gegeben.

Des △ ADC Grundlinie CD, und Inhalt = p.

Gesucht.

Die Höhe Aa, dieses Dreyecks.

Auflösung.

Da

$$p = \frac{Aa \,.\, CD}{2} \text{ (15. 3.)}$$

so ist

$$2p = Aa \,.\, CD \text{ (Ar. I. 88.)}$$

Also

$$\frac{2p}{CD} = Aa.$$

Wenn man also aus der Höhe Aa und Grundlinie CD ein Dreyeck, wie ACD verzeichnen wollte, so könnte man derer unzählig viele bestimmen.

Denn verlängert man (XL. fig.) die Grundlinie CD nach F und zieht durch A mit CD die Parallele AE, so sind die Perpendikel A′a′, A″a″, die Höhen der Dreyecke CA′D, CA″D, ꝛc. gleich der Höhe Aa, und diese Dreyecke selbst, welche über eben der Grundlinie CD stehen, dem △ ACD gleich.

Die Spitzen A′, A″ ꝛc. dieser Dreyecke, liegen alle in der Parallele mit CD, in AE.

Diese Aufgabe gehört also unter die, die unzählig viele Auflösungen zulassen, d. h. unter die **unbestimmten Aufgaben.**

Denn durch die gegebene Höhe und Grundlinie eines Dreyecks, wird eigentlich eine mit der Grundlinie in einer der gegebenen Höhe gleichen Entfernung gleichlaufende Linie AE, bestimmt, in der die Spitzen einer unzähligen Menge von Dreyecke

ecke liegen, die die gegebene Grundlinie, Höhe und Inhalt haben. (14. S. 2. 3.)

Diese Parallele AE, wird der **Ort der Spitzen** genennt,

Die Alten hiessen nämlich die Linie in der jeder Punct gleich geschickt ist eine unbestimmte geometrische Aufgabe zu lösen, einen **geometrischen Ort.**

So ist jeder Punct der Parallele AE, geschickt zur Bestimmung eines Dreyecks, das die gegebene Höhe Aa, und Grundlinie CD, hat.

Ein geometrischer Ort nun führte bey den Alten nach Verschiedenheit der Linie, die die Aufgabe erfodert, den Namen eines **Orts an einer geraden Linie** (dergleichen hier AE), an einen Cirkel, u. s. w. jeden dieser beyden Oerter, nannten sie einen **ebenen Ort**, so wie zuweilen ersteren einen **einfachen.**

42. Satz. 25. Zusatz.

Den Quotienten . . . . . ABE]

Dieser Quotiente kann entweder so groß oder kleiner oder größer als das äusserste △ ABE, seyn, das man erhalten hat, da man nach dem 16. Zus. der Figur Inhalt ausrechnete, und welches also bekannt seyn muß. Man vergleiche daher den gedachten Quotienten mit dieses Dreyecks Inhalt; gesezt ꝛc. (S. Buch)

. . . . . wählen kann]

Weil das Dreyeck ABE kleiner angenommen

als

als der Quotiente den man durch die Division der Anzahl der Theile in der Figur Inhalt erhielte, so mußte man LM so legen, wie in der 99. Figur, um noch das △ BEN zu dem △ ABE setzen zu können, damit △ BEN + △ ABE = einem der verlangten Theile der Figur wurde.

Wäre nun △ ABE = vorhin erwähnten Quotienten; so wäre es selbst = einem der verlangten Theile der Figur.

Wäre aber △ ABE > als dieser Quotiente; so wäre es auch größer als der gesuchte Theil, und man müßte den Quotienten von besagtem Dreyecke abziehen, diesen Unterschied ebenfalls als ein Dreyeck ansehen, dessen Grundlinie auch BE, ist; hierauf gleichgedachten Dreyecks Höhe nach dem 24. Zusatze suchen, und sie so legen, daß sie sich nach A zu erstreckt, um ein Dreyeck zu erhalten, daß von dem △ BAE abgeschnitten wird. Gesezt nun LM (fig. XLI.) wäre diese gefundene Höhe, und auf BE so gesezt, daß M nach A zu fällt; so ziehe man durch M mit BE die Parallele NO, welche AB in N und AE in O schneidet; und jeden dieser beyden Puncte kann die Spitze des gesuchten Dreyecks seyn; man nimmt daher einen von ihnen, O, welcher diesem Dreyecke die bequemste Lage giebt, und zieht BO, so ist AOB, = △ AEB — △ OBE einer der verlangten Theile.

42. Satz. 25. Zusatz. Exempel.

Sollte . . . . . werden.]

Gesezt

Gesezt man sollte die Figur ABCDEA (XLII. fig.) deren Inhalt $= 876^{\square'}$ (das Zeichen $\square'$ bedeutet: Quadratfuß, so wie $\square^{\circ}$ $\square''$ ꝛc. Quadratruthe, Zoll ꝛc.) in drey gleiche Theile theilen; so kann man auf folgende Art verfahren:

Der dritte Theil der Figur $= 292^{\square'}$

Des Δ ABE Inhalt sey $= 74^{\square'}$

so ist der Inh. d. ges. Dreyecks $= 118^{\square'}$

Es sey $BE = 100'$

$$\text{so ist } LM = \frac{2 \cdot 118}{100}$$

$$= 2', 36.$$

In dieser Weite nun ziehe man NO parallel mit BD, so erhält man die zween Durchschnittspuncte, O, N, durch deren einen, N, die Linie NE gezogen, giebt ABNEA als den dritten Theil der Figur.

Den andern dritten Theil nun zu erhalten, halbire man $292^{\square'}$, und sehe die Hälfte $146^{\square'}$ als den Inhalt eines zusuchenden Dreyecks NIE an; Deren Grundlinie NE.

Man messe sie. Gesezt sie wäre $= 116'$;

Nun suche man des Δ NIE Höhe; diese wird

$$= \frac{2 \cdot 146}{116} = 2', 57 \ldots$$ gefunden; sezze auf NE, das Loth EF, und nehme darauf $EF = 2', 57$; ziehe durch

durch F mit NE die Parallele GH, so wird solche ED in I schneiden, und nachdem NI gezogen, wird △ ENI das gesuchte und also = der Hälfte des 3ten Theils der Figur.

Die andere Hälfte, das △ NKI, noch zu erhalten, nehme man NI für die Grundlinie, und setze auf sie das Loth NQ, mache solches = EF = 2′,57, und ziehe durch Q die Linie RP mit NI gleichlaufend; diese wird NC in K schneiden, und so die Spitze des gesuchten △ NKI geben; das Stück NEIKN aber, wird das 2te Drittel der Figur, so wie IDCKI das dritte.

Hätte die Figur in mehr denn drey Theile getheilt werden sollen; so hätte man nur mit den übrigen eben so verfahren dürfen; der lezte aber ergiebt sich allemal von selbst.

42. Satz. 25. Zusatz. Anm.

Ausser den von unsern Herrn Autor hier angeführten Schriften, kann man auch Herrn Geh. R. Böhms Feldmeßkunst V. Cap. 88 u. f. §, u. seine Zusätze zur 2ten Aufl. S. 6 u. f. nachlesen.

43. Satz.

Gegeben.

AB die Seite eines ordentlichen Vielecks, und
EA der Halbmesser des Kreises, worein das Vielecks beschrieben werden kann.

Gesucht.

Die

Die Seite AI eines Vielecks, das noch einmal so viel Seiten hat.

Auflösung.

Es sey EI ein Loth aus dem Mittelpunct E auf die Sehne AB, die gegebene Seite des Vielecks, so ist

$$AI = \tfrac{1}{2} AIB$$
$$AF = \tfrac{1}{2} AB, \text{ und}$$
$$EF = \sqrt{(EAq - AFq)} \text{ [15. S.]}$$

Da nun AB gegeben, so ist $\frac{1}{2}$ AB, folglich AF; also auch $AFq = \frac{1}{4} ABq$ bekannt; und

$$I) \quad EF = \sqrt{(AEq - \tfrac{1}{4} ABq)}$$

Mithin so auch EF bekannt. Hieraus ergiebt sich gleich FI, welches

$$= EI - FE$$
$$II) = AE - EF;$$

und man hat nun

$$III) \quad AIq = AFq + FIq$$
$$= \tfrac{1}{4} ABq + FIq$$

und

$$AI = \sqrt{(AFq + FIq)} \text{ [15. S.]}$$

Sezt man

$$EA = r$$
$$AB = f$$

so hat man

$$EAq = r^2$$
$$\tfrac{1}{4} ABq = \tfrac{1}{4} f^2$$

und

und man erhält nun

$$EF = \sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{4} f^2)} \text{ [I]}$$

also:

$$\text{V) } EFq = r^2 - \tfrac{1}{4} f^2$$

Ferner:

$$FI = r - EF \text{ (II)}$$

Folglich: (nach [III])

$$AIq = \tfrac{1}{4} f^2 + (r - EF)^2$$
$$= \tfrac{1}{4} f^2 + r^2 - 2\,r \,.\, EF + EF^2 \text{ (Ar. II. 5. II. Er.)}$$
$$= \tfrac{1}{4} f^2 + r^2 - 2\,r \,.\, EF + r^2 - \tfrac{1}{4} f^2 \text{ (V)}$$
$$= \tfrac{1}{4} f^2 - \tfrac{1}{4} f^2 + r^2 + r^2 - 2\,r \,.\, EF$$
$$= 2\,r^2 - 2\,r \,.\, EF$$

Folglich:

$$AI = \sqrt{(2r^2 - 2r \,.\, EF)}$$

und auch: [weil

$$CF = \sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{4} f^2)}]$$
$$AI = \sqrt{[2\,r^2 - 2\,r \,.\, \sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{4} f^2)}]}$$

43. Satz. 2. Zusatz.

Je kleiner die Seite eines in einem Kreise beschriebenen Vielecks ist, desto weniger ist ein Loth (wie EF,) aus dem Mittelpuncte (E) auf die Vielecks Seite, (AB) von dem Halbmesser (EA) dieses Kreises unterschieden.

Denn des Vielecks Seite AB ist eine Sehne; je kleiner diese nun wird, desto kleiner wird auch die Höhe FI ihres Bogens AIB, und folglich desto weniger ist $EF = AE - FI$ von AE, dem Halbmesser unterschieden.

Nun

Nun kann man nach diesem 43. Satze aus der Seite des Vielecks von n Seiten, die des Viel. ecks von 2n, dann die von 4n; 8n; 16n; und so immer weiter, finden. Aber die Seite des Vielecks von 2n Seiten ist kleiner als die des n, die des Vielecks von 4n, Seiten, kleiner als die des von 2 n, u. s. w. ohne Ende: Folglich läßt sich nach gedachtem Satze allezeit ein f, eine Vielecksseite, finden, die kleiner als jede gegebene Länge, und folglich ein ꝛc. (S. Buch.)

43. Satz. 2. Zusatz. Exempel.

Nach des 43. Satzes Exempel ist für den Halbmesser = 1 die Seite f des Zwölfecks = 0, 517 gefunden worden. Hieraus nun findet sich leicht das Loth EF für dieses Vieleck; denn in diesem Falle ist

$$EF = \sqrt{(1 - \tfrac{1}{4} f^2)}$$
$$= \sqrt{(1 - 0{,}06682225)}$$
$$= \sqrt{0{,}93317775}$$
$$= 0{,}966$$

Dieß ist aber etwas zu groß, weil man f zu klein angenommen. An angeführtem Orte ist f genauer, nämlich = 0, 51764 gefunden worden. Nimmt man nun f so an, und verfährt wie vorhin, so erhält man EF genauer, nämlich = 0, 96592;

So groß also ist das Perpendikel des Zwölfecks für den Halbmesser = 1; Für eben diesen Halbmesser aber, ist das Perpendikel des Sechsecks = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (43. S. Er.)

Also $= \frac{1,732051}{2}$

$= 0,8660255.$

Aber $0,8660255 < 0,96592;$

Folglich ist 0, 96592 des Zwölfecks Perpendikel, weniger von $\frac{1}{2}$, dem Halbmesser, unterschieden, als 0, 8660255, das Loth des Sechsecks.

43. Satz. 3. Zusatz.

die Seiten (1. Z.)]

Nämlich die Seiten des Vielecks von n, 2n, 4n, 8n, 16n, 32n, u. s. ohne Ende fort, Seiten.

werden . . . . . kommen]

Weil sie immer kleiner und kleiner werden; und je kleiner die Sehne desto näher kommt sie ihren Bogen, oder desto weniger ist sie von ihm unterschieden (41. S. 2. Z.)

43. Satz. 4. Zusatz. V.

Wenn . . . . . zwischen EI; EN]

In der XLIII Figur (welcher der Absicht IIII gemäß gezeichnet ist) seyen MI = IN = AM, und von E, dem Mittelpuncte nach M und N die Linien EM, EN, gezogen. Zwischen diesen Linien fällt der Bogen mln = dem Bogen AI.

Denn der Winkel

EIN = EIM = EAM (19. S. 2. Z.)
EI = EI = AE (12. Erkl. Ar. I, 87.)
IN = IM = MA (Bed.)

Also:

$$\Delta EIN = \Delta EIM = \Delta EAM$$

Folglich der Winkel

$$IEN = IEM = MEA$$

Daher der Bogen

$$IA = Im = mA \text{ (22. S. I.)}$$

Also

$$Am + mI = mI + In$$

d. i.

$$\text{Bogen } AI = \text{Bogen } mIn$$

43. Satz. 4. Zusatz. VII.

Weil $AM + MI > AmI$, (indem man durch A, M, I einen größern Weg zu laufen hat als durch A, m, I wie man leicht sieht) [IIII]; so ist auch, (da

$$AM + MI = MI + IN)$$

MN, größer als mIN.

Hieraus folgt nun, daß MN, die Seite eines ordentlichen um den Kreis beschriebenen Vielecks, größer ist, als der ihr zugehörige Bogen, d. i. der, den die Linien NE, ME, die von dieses Vielecks Seite MN Endpuncte N, M, nach dem Mittelpunct E gezogen sind, begränzen, und welchen man erhält, wenn man den Umfang ꝛc. (S. Buch)

43. Satz. 4. Zusatz. XV.

Aus XII ist

$$\tfrac{1}{2} r z : \tfrac{1}{2} q z = r^2 : q^2$$

Folglich

$$\frac{\frac{1}{2} r z}{\frac{1}{2} q z} = \frac{r^2}{q^2}$$

Aber $\frac{r^2}{q^2}$ kann der Einheit so nahe kommen als

man will; weil, DF und folglich auch Gg, immer kleiner und kleiner werden kann, je kleiner der zu gehörige Bogen DAF wird: Also DE oder q dem Halbmesser r immer näher und näher kommen, so nahe als man will, und folglich auch q^2 dem r^2.

43. Satz. 4. Zusatz. XVIII.

Wenn des Kreisesfläche nicht $= \frac{1}{2} r t$, also nicht gleich einem Dreyecke dessen Grundlinie des Kreises Umfang und die Höhe sein Halbmesser; so ist sie entweder größer oder kleiner als dieses Dreyeck.

Gesezt nun sie wäre größer, so müßte zu diesem Dreyecke ($\frac{1}{2} r t$) etwas gesezt werden können, wodurch es gleich der Kreisfläche würde. Dieses Etwas nun, (gleich) der Differenz des Dreyecks und der Kreisfläche,) muß ein Dreyeck seyn, dessen Höhe $= r$, die Grundlinie aber $=$ einer Größe die x heißen mag. (43. S. 2. Z. XVII; 23. S. 10. Z.)

Wäre (fig. XLIV.) das Loth $ac = r$, $cd = t$; so wäre das Dreyeck $acd = \frac{1}{2} r t$; dieses $\triangle$ aber muß nach unserer Vorausseţung, kleiner als des Kreisesfläche seyn.

Soll es nun ihr gleich werden; so muß zu ihm, offenbar, ein $\triangle$ gesezt werden, das $=$ dem Ueberschuß der Kreisfläche über das $\triangle$ acd. Wäre dieß $\triangle = \triangle$ abc; daß also, wenn es zu dem $\triangle$ acd gesezt würde, das $\triangle$ bad $=$ der Kreisfläche wird; so muß des $\triangle$ abc Höhe $=$ ac $=$ r seyn, und $\triangle$ abc $= \frac{1}{2} r . bc . = \frac{1}{2} r . x$, wenn bc, $= x$ heißt.

Also,

Also, wäre bey dieser Voraussetzung, die Kreisfläche

$$= \tfrac{1}{2} r t + \tfrac{1}{2} r x = \tfrac{1}{2} r (t + x)$$

Nun ist die Fläche des in diesem Kreise beschriebenen Vielecks $= \tfrac{1}{2} q z$ (XV); daher

$$\frac{\tfrac{1}{2} r (t + x)}{\tfrac{1}{2} q z} = \frac{r(t+x)}{q z}$$

$$= \frac{r t + r x}{q z}$$

$$= \frac{r t}{q z} + \frac{r x}{q z}$$

Dieses Quotienten erste Theil $\frac{r t}{q z}$, kann der 1 so nahe kommen als man will; weil $\frac{r}{q}$ so wohl als $\frac{t}{z}$ sich der Einheit so weit man will, nähern kann. (XIII; XIV) Wenn daher im zweyten Theile $\frac{r x}{q z}$, die x eine Größe ist, die sich mit z vergleichen läßt, so hat *) ..... unterscheiden läßt.

Der Quotiente $\frac{r (t + x)}{q z}$, den man erhielte, da man die Kreisfläche durch die innere Vielecksfläche dividirte, kann also bey dieser Voraussetzung der Kreisfläche, nicht so nahe an 1 kommen als man

 will,

*) S. Buch.

will, wie er doch nach XVI soll: Folglich findet die Voraussetzung nicht statt; also kann die Kreisesfläche nicht größer als $\frac{1}{2}$ r t, seyn; oder (auf unsere XLIV. fig. bezogen,) nicht größer als Δ acd.

Aber sie könnte doch wohl kleiner seyn, als $\frac{1}{2}$ r t!

Daß dieß nicht ist, zeigt der izt folgende XVIIII Absatz.

43. Satz. 4. Zusatz. XVIIII.

Bey dieser Voraussetzung muß von $\frac{1}{2}$ r . t etwas weggenommen werden, um gleich der Kreisfläche zu werden. Dieses Etwas muß offenbar ein Dreyeck seyn, daß man $= \frac{1}{2}$ r y setzen kann.

Also wäre nun die Kreisfläche

$$= \frac{1}{2} r t - \frac{1}{2} r y = \frac{1}{2} r (t - y)$$

Nun ist des um diesen Kreis beschriebenen Vielecks Fläche $= \frac{1}{2}$ r z (XV.) Folglich,

$$\frac{\frac{1}{2} r (t - y)}{\frac{1}{2} r z} = \frac{t - y}{z}$$

$$= \frac{t}{z} - \frac{y}{z}$$

Weil aber des äussern Vielecks Umfang der Peripherie seines zugehörigen Kreises so nahe als man will, kommen kann (XIII, XIV); so kann $\frac{t}{z}$ sich der 1 so weit nähern als man will; wenn man auch nun diesen Theil des vorhin gefundenen Quotienten selbst $= 1$ sezte, so ꝛc. (S. Buch.).

43. Satz.

43. Satz. 4. Zusatz. XX.

. . . . . als $\frac{1}{2}$ r t]

Oder, als ein Dreyeck dessen Höhe der Halbmesser, und Grundlinie der Umfang des Kreises ist.

Folglich muß des Kreisesfläche einem solchen Dreyecke gleich seyn.

43. Satz. 4. Zusatz. XXII.

Wenn man nach dem 43. S. aus des Sechsecksseite die des Zwölfecks, dann aus dieser die des 24Ecks, aus der, die des 48Ecks, und endlich aus der 48Ecksseite die des 96Ecks, sucht; so giebt diese 96mal genommen, den Umfang des im Kreise beschriebenen 96Eck. Hiebey ergiebt sich das Loth aus dem Mittelpuncte auf die 96Ecksseite. Durch dieses und dem Halbmesser, läßt sich nach XII, die halbe Seite des um diesen Kreis beschriebenen 96Ecks, und folglich sein Umfang, finden. Durch diese so berechnete Umfänge des äussern und innern 96Eck erhält man ein Paar Zahlen, als Gränzen, zwischen welche die Zahl für des Kreises Umfang fallen muß.

So läst sich mit dem Archimed finden: der Umkreis enthalte ꝛc. (S. B::ch.)

Man sieht aber aus den bisherigen, daß man der Wahrheit desto näher komme, je mehr Seiten das Vieleck hat, dessen Umfang man berechnet.

Auf dergleichen Art hat nach dem Archimed Ludolph von Cöln oder Ceulen, aus Hildes-

heim, die Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise noch viel schärfer ausgedruckt, wie man aus folgender Anmerkung im Buche sehen wird.

43. Satz. 4. Zusatz. Anm.

Man nimmt . . . . . gleichgültig.]

Wenn man den Durchmesser für die Einheit annimmt; so enthält der Umkreis 3, 14 und etwas darüber aber nicht 3, 15, solche Durchmesser oder Einheiten.

Genauer drückt man den Umkreis aus, wenn man mehrere Ziffern von denen die Ludolph von Cölln, oder Ceulen, dafür gefunden hat, und im Buche angegeben sind.

So ist für eben den Durchmesser = 1 der Umkreis genauer = 3, 141; noch genauer = 3, 1415; u. s. w.

Dieß alles ist auch mit folgenden einerley:

Wenn der Durchmesser

100	Theile hat, so hat der Umkr.	314
1000	" " " " "	3141
10000	" " " " "	31415
100000	" " " " "	314159
1000000	" " " " "	3141592

u. s. w.

In diesem Verstande nun sagt man:

Der Umfang verhalte sich zum Durchmesser wie

1, : 3, 14, oder 100 : 314

genauer

genauer wie

1 : 3, 141, oder 1000 : 3141

noch genauer wie

1 : 3, 1415, oder 10000 : 31415

u. s. w.

Jede dieser Verhältnisse ist nur bey nahe wahr; und man kann allezeit diejenige wählen, die zu der vorhabenden Absicht scharf genug ist. Meistens bedient man sich der 100 : 314.

Wäre eines Kreises Durchmesser = 100 Ellen; so würde nach der Verhältniß 100 : 314, seine Peripherie etwas mehr als 314 Ellen aber nicht 315, betragen. Nach der Verhältniß 1000 : 3141 findet man ihn genauer, nämlich, (indem man schließt:

1000 : 3141 = 100 : Umkr.)

= 314, 1 Ellen = 314 $\frac{1}{10}$ Ellen.

Also bis auf $\frac{1}{10}$ Elle genau, weil er etwas mehr als 314 $\frac{1}{10}$ Elle aber noch nicht 314 $\frac{2}{10}$ Elle beträgt, indem die Verhältniß etwas mehr als 1000 : 3141 aber nicht 1000 : 3142 ist. Durch die Verhältniß 10000 : 31415 findet man den Umkreis noch genauer, nämlich = 314, 15 Elle = 314 $\frac{15}{100}$ Elle; folglich bis auf $\frac{1}{100}$ Elle genau, weil er etwas mehr denn 314 $\frac{15}{100}$ Ellen, aber

nicht $314\frac{16}{100}$ Elle, beträgt. Nähme man die Verhältniß 1000000 : 3141592 so fände man den Umkreis unsers Exempels bis auf $\frac{1}{10000}$ Elle genau.

Diese lezte Verhältniß, welche auch = 1 : 3, 1415 92 ist, kommt der 113 : 355 nahe; weil

$$\frac{355}{113} = 3,1415929\ldots$$

$$\text{oder} = \frac{3,1415929}{1}\ldots$$

Also $113 : 355 = 1 : 3,1415929\ldots$

Man sieht daß diese Verhältniß, welche **Adrian Metius**, angegeben hat, etwas zu groß ist, aber doch bis auf 6 Decimalstellen, mit der des von Cölln seiner, übereinstimmt, folglich bis so weit richtig ist. Man kann sie also in alle den Fällen brauchen, bey den man um 1 Millionentheilgen fehlen kann. La Caille hat sich in seinen Schreiben meist des Metius Verhältniß bedient.

$$\text{Da } \frac{22}{7} = 3,1428\ldots$$

$$= \frac{3,1428}{1}\ldots;$$

so ist

$$7 : 22 = 1 : 3,1428\ldots;$$
$$= 100 : 314,28\ldots$$

Also

Also stimmt des Archimeds Verhältniß nur mit den drey ersten Ziffern der Ludolphischen Zahl, überein, folglich ist sie so weit richtig.

Genauer ist die Verhältniß 106 : 133, wo, wenn der Durchmesser in 106 gleiche Theile getheilt würde, der Umkreis 133 derselben enthielte. Diese Verhältniß = 1 : 3, 14150... Zwar etwas zu klein, aber doch bis auf 4 Decimalstellen richtig.

44. Satz.

I)

Gegeben Eines Kreises Durchmesser = d.

Gesucht Seinen Umfang, der p heißen mag.

II)

Gegeben p und d.

Gesucht Des Kreises Flächeninhalt = a.

Auflösung.

Für I)

Man drücke die Verhältniß,

1 : 3, 1415.....

durch die

1 : P

aus, daß also 1 : P = 1 : 3, 14; oder = 1 : 3, 141,

3, 141, oder = 1 : 3, 1415; u. s. w. nachdem es die vorgesezte Schärfe erfodert.

Nun ist

$$1 : P = d : p$$

Also

$$p = P \cdot d$$
$$= 2r \cdot P$$

wenn $d = 2r$, oder r dem Halbmesser dieses Kreises gleich ist.

Folglich erhält man den Umkreis, (p) wenn man 3, 141 .... in den gegebenen Durchmesser oder doppelten Halbmesser multiplicirt.

Für II)

Da die Fläche eines Kreises gleich einem Dreyecke ist, dessen Höhe der Halbmesser, also hier $= \frac{1}{2} d$, $= r$ und Grundlinie die Peripherie, hier $= p$, $= P \cdot d$; so ist sein Inhalt, oder

$$a = \frac{\frac{1}{2} d \cdot P}{2} \text{ (42. S. 15. B.)}$$
$$= \frac{1}{4} d \cdot p$$
$$= \frac{1}{4} d \times P \cdot d$$
$$= \frac{1}{4} d^2 \cdot P$$
$$= \frac{P \cdot d^2}{4};$$

Ferner

$$a = \frac{r \cdot P}{2}$$
$$= \frac{r \cdot 2rP}{2}$$

$$= \frac{2\,r^2\,P}{2}$$

$$= r^2\,P$$

Also erhält man den Inhalt eines Kreises, (in Quadratmaaß wie jede Fläche) wenn, entweder das Quadrat des Durchmessers mit 3, 141 .... multiplicirt, und das Product durch 4 dividirt wird; oder, wenn man das Quadrat des Halbmessers in 3, 141 ..... multiplicirt.

In der ꝛc.]

$$\tfrac{1}{2}\,P = \frac{3,141592653589793}{2} .. = \text{ꝛc.}$$

$$\tfrac{1}{4}\,P = \frac{3,141592653589793}{4} = \text{ꝛc.}$$

} (S. Buch)

44. Satz. 2. Zusatz. Anm.

Man stelle sich (60. fig.) über AB einen Kreis vor dessen Durchmesser AB, und nenne ihn A, desgleichen einen über AC, der zum Durchmesser AC hat, und C heißen mag, endlich einen über BC, für einen Durchmesser, gleich dieser Linie BC, welcher B heißen soll; so sind diese Kreise ähnliche Figuren, indem es alle sind, weil sie auf ähnliche Art erzeugt werden.

Daß nun B die Summe von A und C, wenn

$$BC = \sqrt{(ABq + ACq)} \text{ oder}$$

$$BCq = ABq + ACq,$$

erhellet daraus, daß B zu dieser Summe eben die Verhältniß hat, wie BCq ; (ABq + ACq)

Denn

Denn nach des 42. S. 22. Zusatze ist

$$A : C = ABq : ACq$$

Also

$$A + C : C = ABq + ACq : ACq$$

Aber auch

$$C : B = ACq : BCq$$

Folglich:

$$A + C : B = (ABq + ACq) : BCq$$

Also:

$$(A + C) \times BCq = B \times (ABq + ACq)$$

$$BCq = ABq + ACq \text{ div.}$$

Folglich:

$$A + C = B$$

Eben so erhellet, daß

$$C : B - A = ACq : BCq - ABq$$

Folglich

$$C = B - A,$$

wenn $AC = \sqrt{(BCq - ABq)}$

44. Satz. 3. Zusatz.

Da $\frac{d^2 \cdot P}{4} = a$, also

$$= d^2 \times \tfrac{1}{4} P$$

so ist auch

$$a = d^2 \times 0,785\,39 \ldots \text{ (S. Buch)}$$

[... es ist ..... u. s. w.]

Weil

$$a = d^2 \times 0,785\,3 \ldots$$

so ist

$$a \cdot 1 = d^2 \cdot 0,785\ldots.$$

Folglich:

$$a : d^2 = 0,7853\ldots : 1$$

Von dem dritten Gliede nimmt man so viele Ziffern als die vorgesetzte Schärfe, erfodert.

Daher kann man die Verhältniß $a : d^2$ entweder nur

$$= 0,785 : 1$$
$$= 785 : 1000;$$

oder genauer

$$= 0,7853 : 1$$
$$= 7853 : 10000$$

oder noch genauer

$$= 0,78539 : 1$$
$$= 78539 : 100000$$

u. s. w.

nehmen.

44. Satz. 4. Zusatz.

Dieses . . . . . suchet]

Denn da $a = d^2 \times 0,78539\ldots$ so darf nur, weil $\frac{1}{4}$ P schon bekannt ist, d gegeben seyn, da man alsdenn gleich den Inhalt findet, wenn man des Durchmessers Quadrat in $0,78539\ldots$ multipliciret.

44. Satz. 5. Zusatz.

Aus der Peripherie p, den Durchmesser d zu finden.

Dieß geschiehet, wenn man schließt:

P : 1

$$P : 1 = p : d$$

Folglich

$$d = \frac{p}{P}$$

$$= \frac{p}{3,14159\ldots}$$

$$= p\,\frac{1}{3,14159\ldots}$$

Wenn man aber 1 durch 3, 14159 ... dividirt; (Ar. III. 14) so erhält man für $\frac{1}{P}$ die im Buche angegebene Zahl, und folglich

$$d = p \cdot 0,3183\ldots\ldots$$

und

$$\tfrac{1}{4}\,d = \frac{p \cdot 0,3183\ldots}{4}$$

$$= p \cdot 0,3183\ldots\ldots$$

$$= p \cdot 0,079577\ldots\ldots$$

44. Satz. 6. Zusatz.

Weil

$$\frac{d^2\,P}{4} = a$$

so ist

$$d^2\,P = 4a$$

$$d^2 = \frac{4a}{P}$$

$$= 4a$$

$$= 4\,a\,\frac{1}{P}$$

$$= 4\,a_1 \times 0{,}31831\ldots$$

44. Satz. 7. Zusatz.

Aus der Proportion

$$360^\circ : FKD = p : DF$$

hat mvn die Auflösung zwoer Aufgaben:

1) **Aus dem Umkreise, und einem seiner in Graden und deren Theile gegebenen Bogen, die Länge dieses Bogens zu finden.**

Er enthalte n° und seine Länge sey $= l$; so ist

$$l = \frac{n^\circ \cdot p}{360^\circ}$$

$$= \frac{n}{360} \cdot 2\,r\,P$$

$$= \frac{n}{180} \cdot r\,P$$

in eben dem Maaße, in dem der Durchmesser ausgedruckt ist.

2) **Aus p, und l die Anzahl n der Grade, die der Bogen von der gegebenen Länge l enthält, zu finden.**

$$n^\circ = \frac{360^\circ \cdot l}{P}$$

$$= \frac{360^\circ \cdot l}{2\,r\,P}$$

$$= \frac{180^\circ \cdot l}{r\,P}$$

$$= \frac{1}{P} \cdot 180^\circ \cdot \frac{l}{r}$$

Aus n und l findet sich auch

$$r = \frac{180}{n} \cdot \frac{l}{p} = \frac{180}{n} \cdot l \cdot 0,318\ldots$$

oder

$$d = \frac{360}{n} \cdot \frac{l}{P}$$

$$= \frac{360}{n} \cdot l \cdot 0,318\ldots$$

Den Inhalt eines Ausschnitts erhält man wenn man den ihm zugehörigen Bogen, (nachdem dieser in dem Längenmaaße des Durchmessers ausgedruckt ist,) um die Hälfte des Halbmessers, oder vierten Theil des Durchmessers multiplicirt; weil der Ausschnitt einem Dreyecke gleichet, dessen Grundlinie der ihm zugehörige Bogen, und Höhe der Halbmesser.

Denn aus dem Buche ist klar, daß sich der Ausschnitt zur Kreisfläche verhält, wie sein Bogen zur Peripherie. Also:.

$$FKDF : a = DF : p$$

oder

$$FKDF : \frac{pd}{4} = DF : p$$

Folglich

FKDF

$$FKDF = \frac{pd \cdot DF}{4P}$$
$$= \tfrac{1}{4} d \cdot DF$$

Weil

$$DF = \frac{n^\circ}{360^\circ} \cdot p \text{ (wenn } FKD = n^\circ)$$
$$= \frac{n^\circ}{360^\circ} \cdot 2 r P$$

so ist auch:

$$FKDF = \tfrac{1}{4} d \cdot \frac{n^\circ}{360} 2 r P$$
$$= \frac{\pi}{360} \cdot r^2 P$$

7. Zusatz. Exempel.

Da $p = 2 r P$

so ist $\tfrac{1}{2} p = r P$

Folglich, wenn $2 r = d = 8'$,

$\tfrac{1}{2} p = 4 \cdot 3,14 \ldots = 12', 56.$

Nun kann man statt

$360^\circ : FKD = p : DF$

auch sagen:

$180^\circ : FKD = \tfrac{1}{2} p : DF$

(Ar. V. 21;)

Also im Exempel, (wenn $FKD = 50^\circ$; $\tfrac{1}{2} p =$ 12', 56 gesezt wird)

$180^\circ ; 50^\circ = 12', 56 : DF$

Folglich

$$DF = \frac{50^\circ \times 12',56}{180}$$

$$= 3',48 \ldots$$

Folglich ist des Ausschnitts Inhalt $= 2' \times 3',48$
$= 6',96$ in Quadratmaaß.

Hätte man P = 0, 314159 angenommen..]
Muß gelesen werden:
Hätte man P = 3, 14159 angenommen ...

...Ausschnitts Inhalt 6, 98130...]
Versteht sich 6', 98130 Quadratmaaß.

44. Satz. 8. Zusatz.

Wären .....berechnen kann]
Weil

$$DF : FA = FA : FI \quad (31.\ S.)$$

so ist

$$DF = \frac{FAq}{FI}$$

$$= \frac{(\frac{1}{2} AB)q}{FI}$$

Nun ist der Durchmesser oder

$$DI = DF + FI$$

Also auch:

$$= \frac{FAq}{FI} + FI$$

Hieraus kann man leicht den Halbmesser finden, den Kreis beschreiben und den Abschnitt berechnen.

8. Zu-

8. Zusatz. Exempel.

I) Aus dem, daß FD = 5′, 1428
und der Halbmesser IE, = DE, = 6′, 0714
gefunden, sieht man, daß hier FD < DE ist, und folglich E, (der Mittelpunct,) zwischen F und I, (wie in fig. XLV. gezeichnet) fällt, also der Bogen AIB über 180° wird, folglich auch der ihm zugehörige Winkel AEB.

II) Beschreibt man nun mit dem Halbmesser 6′, 07 einen Kreis, und trägt darein die Sehne = 12; so kann man mit dem Transporteur den Winkel AEB finden, der zu seinem Maaße dem Bogen ADB, welcher hier < 2 R ist, hat.

III) Zieht man diesen Bogen von 360° ab, so erhält man den Bogen AIB; weil

B. ADB + AIB = 360°

Folglich:

B. AIB = 360° — B. ADB.

IV) Nach II aber findet sich der Bogen
ADB = 162° 26′
Folglich der Bogen
AIB = 360° — 162° 26′
= 359° 60′ — 162° 26′
= 197° 34′.

V) Weil das △ AEB = $\frac{1}{2}$ AB . EF und hier EF = FI — EI = 7′,0000 — 6′,0714 = 0′,9286 = ED — FD, und $\frac{1}{2}$ AB = 6′; so ist das

$$\Delta AEB = 6 \times 0{,}9286$$
$$= 5',5716 \text{ Quadratmaaß.}$$

VI) Des Bogens von 162° 26′ Länge für den Halbmesser 6′,0174, ist

$$= 17',225\ldots$$

Alſo iſt der Ausſchnitt ADBEA

$$= 17',225\ldots \times 3',0087$$
$$= 57',8248\ldots \text{ Q. M.}$$

VII) Folglich des Abſchnitts ADBA Inhalt

$$= 51',8248 - 5'5716 \text{ (VI, V)}$$
$$= 46,2532 \text{ Dec. Q. F.}$$

VIII) Für den Abſchnitt AIBA müßte man die Länge l des Bogens AIB = 197° 34′, nach dem 7. Zuſ. und deſſen Erl. ſuchen; Hierauf das Product $l \times 3{,}0087$ machen, und, ſo den Ausſchnitt AIBEA finden, zu dieſen aber das Δ AEB addiren.

44. Satz. 9. Zuſatz.

Es ſey der Umfang eines Quadrats = p = der Peripherie eines Kreiſes; ſo iſt des Quadrats Seite = $\frac{1}{4}$ p, und ſein Inhalt = $\frac{1}{4}$ p $\times \frac{1}{4}$ p = $\frac{1}{16}$ p^2 (42. S. 4. Z.), des Kreiſes Inhalt aber = $\frac{1}{4}$ dp (44. S.); Folglich beyder Figuren Verhältniß = $\frac{1}{16}$ pp : $\frac{1}{4}$ dp; aber

$$\frac{1}{16} pp : \frac{1}{4} dp = \frac{1}{16} p : \frac{1}{4} d \text{ (Ar. V. 21.)}$$
$$= \frac{1}{4} p : d$$

und, (weil p = d P (44. S.) alſo $\frac{1}{16}$ p^2 = $\frac{1}{16}$ d^2 P^2, auch $\frac{1}{4}$ dp = $\frac{1}{4}$ d^2 P;)

$\frac{1}{16}$ p^2

$$\tfrac{1}{16} p^2 : \tfrac{1}{4} dp = \tfrac{1}{16} d^2 P^2 : \tfrac{1}{4} d^2 P$$
$$= \tfrac{1}{4} d^2 P : d^2$$
$$= a : d^2 \text{ (44. S.)}$$

Also;

$$\tfrac{1}{16} p^2 : \tfrac{1}{4} dp = \tfrac{1}{4} p : d = a : d^2$$

woraus man sieht, daß des Quadrats Fläche kleiner ist als des Kreises seine, wiewohl beyde gleich grossen Umfang haben.

44. Satz. 9. Zusatz. 1. Anm.

Die Beweise . . . . . L. V.]

Zu Anfange des V. Buchs der **Pappus Alexandrinus** Collect. Math. findet man eine Vergleichung des Inhalts der Figuren von gleichem Umfange; wovon Herr Hofrath Karsten in seinem Lehrbegrif der Math. 2 Theile, XXI. Abschn. der Geom. einen Auszug mitgetheilt hat.

44. Satz. 9. Zusatz. 2. Anm.

Dieser . . . . . bleibt]

Nach dem 14. Satze sind alle die Parallelogramme AH, CH, EH ꝛc. die über einer Grundlinie GH zwischen einerley Parallele IK mit der Grundlinie, stehen, gleich.

Aber des Parallelogramms AH Umfang ist kleiner als des CH, dieses Umfang, kleiner als des EH ꝛc.

Denn $AB = CD = EF = GH$ (17. Erkl.)
und $GA < GC < GE$ ꝛc. (9. S. 12. Z.)

Und so können unzählig viel Parallelogramme, alle gleichen Inhalts, über GH zwischen IK stehen, daß jedes Umfang immer größer als der der vorhergehenden ist.

Man sieht also wie der Umfang eines Parallelogramms ohne Ende wachsen kann, wenn sein Inhalt unveränderlich bleibt.

44. Satz. 9. Zusatz. 3. Anm.

Vermuthlich ..... schon hat]

Herr **Lambert** hat im 2. Theil, V. Abh. seiner **Beyträge zum Gebrauch der Mathematik** gezeigt, daß die Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise irrational sey (§. 15, 16, an a. O.); und wenn auch sich 1 : P durch Rationalzahlen angeben liesse, so müßten diese ungeheuer groß und zum Rechnen unbequem seyn. (das. §. 9.)

Schon Sturm hat in seiner Mathesi Enucleata (an dem im Buche angef. Orte) die Irrationalität dieses Verhältniß zu beweisen gesucht: Allein sein Beweis ist mangelhaft. Er gründet ihn auf die Summe einer unendlichen Reihe, deren Glieder alle, irrational sind; aber eine solche Summe kann deswegen immer auch rational seyn.

44. Satz. 10. Zusatz.

Der Ausschnitt ..... 360°]

Der Ausschnitt aus dem Ringe, NPOQ : ganzem Ringe = der Winkel NKQ, (oder Bogen NQ) : 360°.

Denn

Denn man stelle sich den Umkreis in Theile getheilt vor, die den Bogen NQ genau messen, und von diesen Theilpuncten nach dem Mittelpuncte gerade Linien gezogen; so werden so viele kleine Ausschnitte aus dem Ringe auf den NPOQ gehen, als solche kleine Bogen auf NQ, und der Ring so viele kleine Ausschnitte enthalten, als der Umkreis kleine, diesen Ausschnitten gehörige, Bogen.

44. Satz. II. Zusatz.

$GKD : 360° = DG : P$

$360° : fKD = p : fd.$

$GKD : fKD = DG \cdot p : P \cdot fd$ (Ar. V. 50)

aber $p = \frac{r \cdot P}{R}$, weil $R : P = r : p$; also

$$GKD : fKd = \frac{DG \cdot r \cdot P}{R} : df \cdot P$$

$$= \frac{DG}{R} : \frac{df}{r}$$

$$= DG \cdot r : df \cdot R$$

$$= (DG : df) + (r : R)$$

[Ar. VI. 3] oder $= (DG : df)\ (r : R)$ [das. 9. Er.]

Oder ..... zusammengesezt.

Sind also die Winkel gleich, so verhalten sich die Bogen wie die Halbmesser.

Denn, wenn $GKD = fKd$

so ist

$GKD : fKd = 1 : 1$; also

$$1 : 1 = \frac{DG}{R} : \frac{df}{R}$$

Folglich

$$\frac{DG}{R} = \frac{df}{r}$$

Also

$$DG : R = df : r$$

d. i.

$$DG : df = R : r$$

Der

Der Geometrie Zweyter Theil. *)

Von den Lagen der Flächen und den Körpern.

Erklärungen.

I.

Eine . . . . . werden.]

Das Pappier worauf die Figur gezeichnet ist, muß man sich als die Ebne, die mit FGHI bezeichnet vorstellen, und den Punct A sich über derselben, gerade über B, so in dieser Ebne liegt, denken.

Wenn man auf dem Pappiere, oder einem Stück Pergament ꝛc. einen Punct B annimmt, darauf durch diesen, Linien CB, DB, BE ꝛc. zieht, und in B etwa eine Nadel (die man als eine gerade Linie ansehen kann) so steckt, daß diese mit allen durch B gehenden Linien rechte Winkel macht; so steht diese Nadel auf diesen Papier, oder Pergament ꝛc. (daß man freylich als eine Ebne ansehen muß) **senkrecht.**

Die

*) Dieser Theil der Geometrie heißt, auch die körperliche Geometrie.

Die Neigung ..... diese Ebne eintrift]

Man stelle sich (fig. 101.) über der Ebne FGHI (das wäre hier über dem Papiere, worauf die Figur gezeichnet ist) einen Punct, A, und von diesen nach irgend einem Puncte C in der Ebne eine Linie, AC, gezogen, vor; so schneidet diese die Ebne in dem Punct C und macht da mit ihr einen Winkel, welcher kein anderer ist als der Winkel ACB, den man erhält, wenn man von einem willkührlichen Puncte A der Linie AC, auf die Ebne ein Loth AB herab läßt, und sowohl durch B, (den Punct wo dieses Loth in der Ebne eintrift), als auch den Punct C, die gerade Linie CB zieht.

Wenn man ein rechtwinklichtes Dreyeck, etwa von sehr dünnen Meßing ꝛc. auf, z. E. die ebne Oberfläche eines Tisches, senkrecht stellt, so ist der Winkel den die Hypothenuse mit der Grundlinie bildet, eben der, den erstere mit der Tischebne macht.

2.

Die Neigung ..... gezogen werden]

Man kann sich die Sache auch wie in der XLIX. Figur vorstellen, wo der Winkel FBG die Neigung beyder Ebnen FLIK, GCDM vorstellt. Diesen Winkel aber erhält man, wenn man in dem Durchschnitte AB beyder Ebnen einen beliebigen Punct annimmt, und aus diesem auf AB in der Ebne GCDM ein Loth GB, wie auch in der Ebne FLIK ein Perpendikel FB, aufrichtet.

3.

Wenn man sich drey oder mehr ebene Winkel ABC, CBD, DBA ꝛc. (103. fig.) in einem Punct B so vereinigt vorstellt, daß jede zwo an einander liegende, einen Schenkel gemein haben; so ist der bey B begränzte, aber gegen C, D, A, offene Raum, zwischen mehr als zwo Linien BA, BC, BD enthalten, deren aber nie mehr als zwo in einer Ebne liegen. Dieser Raum heißt ein **körperlicher Winkel** oder eine **Ecke.**

Man nennt sie **dreyseitig, vierseitig** ꝛc. nachdem sie von drey, vier ꝛc. ebnen Winkeln begränzt wird.

3. Erklärung. Anmerkung.

Man kann auch hierüber Herrn Hofrath Karstens Lehrbegriff der gesammten Math. XXIII. Abschn. der Geometrie, nachlesen.

Indessen kann man sich den Satz schon einigermaaßen dadurch darthun, daß alle Winkel um einen Punct, wenn ihre Schenkel alle in einer Ebne liegen, zusammen 360° betragen, und so keinen körperlichen Winkel begränzen.

4.

So stellte fig. L. ein Prisma vor, oder einen körperlichen Raum, den die parallelen gleichen und ähnlichen Ebnen abcdea, ABCDEA, die **Grundflächen**, und, die Parallelogramme oder **Seitenflächen**, aB, aE, bC, dC, eD, [deren an der Zahl so viele sind, als die Grundflächen Seiten haben, hier nämlich 5,] begränzen.

Dieses

Dieses Prisma heißt ein fünfseitiges, weil es so viele Seitenflächen hat, und diese Körper darnach unterschieden werden.

Stehen diese Parallelogramme oder Seitenflächen alle auf den Grundflächen senkrecht, d. i. sind alle Winkel wie Aae, bBb, aAE ꝛc. rechte; so ist es ein senkrechtes fünfseitiges Prisma und die Seitenfläche desselben, Rechtecke, sonst ein schiefes.

Die 112. Figur stellt ein Parallelepipedum vor, weil da die Grundflächen db, DB sowohl als die Seitenflächen dA, dC, cB, aB, Parallelogramme sind.

Wenn diese Seitenflächen auf den Grundflächen senkrecht stehen, so ist es ein gerades oder senkrechtes Parallelepipedum, sonst ein schiefes.

Ein Parallelepipedum ist also ein vierseitiges Prisma; wie aus dem 53. Satze weiter erhellen wird.

5.

So stellt die LI. fig. eine vierseitige Pyramide vor, und die 125 einen Kegel, dessen Axe AC ist.

8. Erklärung. 1. Anmerkung.

Man kann beweisen, daß nicht mehr als fünf ordentliche Körper möglich sind; daß es deren nur drey giebt, welche von gleichseitigen Dreyecken umschlossen werden, einen, der von 6 Quadraten,

draten, und einen, der von 12 regulären Fünfecken, begränzt wird. Jener ist der **Würfel**, dieser das **Dodecaedrum.**

Die dreyseitige Pyramide, deren Grundfläche und Seitenflächen 4 gleichgroße gleichseitige Dreyecke sind, ist ein ordentlicher Körper und heißt ein **Tetraedrum.**

Die doppelt vierseitige Pyramide, deren Seitenflächen 8 gleichgroße gleichseitige Dreyecke sind, ist ein ordentlicher Körper und der, den man das **Octaedrum**, nennt.

Zwanzig ordentliche Dreyecke begränzen das **Icosaedrum.**

Diese 5 ordentlichen Körper heissen von ihren Erfinder, die **Platonischen.**

Eine allgemeine Theorie von diesen **Körpern**, findet man unter andern in dem XXV. Abschnitt der Geometrie des Herrn Hofrath Karstens Lehrbegrif der Mathematik.

Indessen wird folgendes das was bisher von den Platonischen Körpern ist gesagt worden, einigermaaßen aufhellen.

Ein körperlicher Winkel eines ordentlichen Körpers kann nur auf fünferley Art entstehen.

Denn

Denn weil einen solchen Körper lauter reguläre Vielecke begränzen; so muß sein körperlicher Winkel, von Polygonwinkeln umschlossen werden, welche aber zusammen weniger denn 360° betragen müssen. Nun muß eine Ecke wenigstens von 3 ebnen Winkeln begränzt (II. Th. 3. Erkl.) seyn. Daher kommt es nur darauf an, welche und wie viel reguläre Polygone hiezu schicklich sind.

Eines gleichseitigen Dreyecks Winkel = 60°; folglich,

drey derselben = 180°,
vier = = 240°
fünf = = 300°; aber
sechse = = 360°;

Also kann eine Ecke aus, drey, vier und fünf gleichseitigen Dreyeckswinkeln bestehen, aber nicht aus 6, weil die Summe so vieler schon 360° ist.

Des Quadrats Winkel = 90° und drey derselben = 270°; aber 4, = 360°: Folglich können nur drey solche Winkel eine Ecke begränzen.

Der Polygonwinkel eines ordentlichen Fünfecks = 108°; also drey derselben = 324°; aber 4 davon betragen 432°: Mithin können nur drey Polygonwinkel eines regulären Fünfecks, einen körperlichen Winkel umschliessen.

Bey dem ordentlichen Sechseck betragen 3 Polygonwinkel 360° und bey Polygonen von mehrern Seiten, mehr denn 360 Grade.

Also sind nur fünf Arten der Entstehung einer Ecke möglich.

Hieraus sieht man schon, daß es nicht mehr als fünf reguläre Körper giebt; wie wir sie vorhin beschrieben haben.

Grundsatz.

Da . . . . . Lage einer Ebne]

So lange eine Ebne nur durch zween Puncte geht, kann man sie in jede Lage bringen, weil sie sich um die durch diese Puncte gehende Linie, als eine Axe, drehen läßt; So bald man aber noch einen dritten Punct annimmt, und die Ebne in die Lage bringt, daß dieser Punct in ihr liegt; so bald ist ihre Lage bestimmt; Jede andere Ebne die auch durch diese drey Puncte läuft, fällt mit jener zusammen; und sie können also in ihren Lagen nicht von einander verschieden seyn.

In der körperlichen Geometrie nimmt man daher als eine mögliche Voraussetzung an:

Durch jede drey Puncte, die nicht in gerader Linie liegen, so wie durch zween, eine Ebne zu legen, die jede beliebige Größe haben kann.

Man kann sich also, wenn man es nöthig hat, durch jede 3 Puncte eine Ebne gelegt, vorstellen.

Von der Lage der Linien und Ebnen.

45. Satz.

Bedingung.

Die gerade Linie AB stehe aufzwoen

in der Ebne DBE gezogenen Linien DB, CB, in ihrem Durchschnitte B, senkrecht.

Behauptung.

AB steht auf jeder durch B in der Ebne DBE gezogene gerade Linie GH, d. i. auf dieser Ebne selbst, (1. Erkl.) senkrecht.

Vorbereitung.

1) Man verlängere die Linie BD nach C, desgleichen auch BE nach F;

2) Nehme darauf BC = BD; BF = BE;

3) Ziehe durch die vier Puncte F, C, E, D, die alle in der Ebne DBE liegen, (weil D, B, und B, E, darinne liegen, [Bed.] also auch DC, EF [Grundſ.]) die Linien FC, CE, ED, EF;

3) Desgleichen nach Gefallen durch B die Linie GH, welche FD in G und EC in H schneiden wird.

4) Nun nehme man einen willkührlichen Punct A in AB an, und

5) ziehe nach den genannten Puncten F, G, D, E, H, C die Linien AF, AG, AD, AE, AH, AC;

So ergeben sich Dreyecke, wodurch sich der

Beweis

folgendermaßen führen läßt.

Da

FB = BE (Vorb. 2.)

BD

BD = BC (Vorb. 2.)
W. FBD = CBE (8. S. 4. Z.)

---

so ist
I) Δ FBD = Δ CBE (2. S.)
FD = CE
W. BFD = BEC
BDF = BCE

Ferner:
BF = BE (Vorb. 2.)
BFD = BEC (I)
FBG = EBH (8. S. 4. Z.)

Also:
II) Δ FBG = FBH (3. S.)
FG = EH
BG = BH.

Weil
AB = AB (Ar. I. 87.)
BD = BC (Vorb. 2.)
ABD = ABC (= R; [Bed.])

---

so ist
III) Δ ABD = Δ ABC (2. S.)
AD = AC

Auch ist
BF = BE (Vorber. 2)
AB = AB
ABF = ABE (= R; [Bed.])

Mithin:
IV) Δ ABF = Δ ABE (2. S.)
AF = AE.

Da also

FD = CE (I)
AD = AC (III)
AF = AE (IV)

---

so ist

V) Δ AFD = Δ ACE (4. S.)
W. AFG = W. AEH

und, weil

FG = EH (II)
AF = AE (IV)
W. AFG = W. AEH (V)

VI) Δ AFG = Δ AEH (2. S.)
AG = AH.

Auch, da

BG = BH (II)
AG = AH (VI)
AB = AB

VII) Δ ABG = Δ ABH (4. S.)

und folglich

W. ABG = W. ABH
= R (I. Th. 11. Erkl.)

Da nun GH nach Gefallen gezogen worden, so kann sie jede in der Ebne DBE gezogene Linie seyn; Also ist AB auf jeder durch B gehenden geraden Linie senkrecht; folglich auf der Ebne DBE, selbst.

45. Satz. Zusatz.

Wenn eine Linie (AB) auf dreyen durch einen Punct (B) gehende Linien, (BD, BE, BH)

BH) in ihrem Durchschnittspuncte senkrecht stehet; so liegen diese Linien in einer Ebne.

Bedingung.

AB stehe in B auf BD, BE, BH, die einander in B schneiden, senkrecht.

Behauptung.

BD, BE, BH liegen in einer Ebne.

Beweis.

Lägen sie nicht in einer Ebne; so wird eine durch den Winkel DBE gelegte Ebne DFCE nicht durch BC gehen (denn gienge sie durch; so hätte man schon das, was bewiesen werden soll), und daher die Ebne des Winkels ABH in einer von BC unterschiedenen geraden Linie schneiden. Diese sey Bh; so muß sie noch in der Ebne AHB seyn, (II. Th. 3. Erkl. Anm.) und durch B gehen (weil beyde Ebnen durch B gehen, und Bh für ihren gemeinschaftlichen Durchschnitt angenommen worden.)

Nun muß vermöge des 45. Satzes AB auf Bh und nach der Voraussetzung auch auf BH senkrecht stehen; Also wäre sowohl ABh, als ABH, = R; dieß kann aber vermöge 9. Satz 4. Zusatz nicht seyn.

[Auf der 5. Zeile dieses Zusatzes lese man ABH statt AEH.]

46. Satz.

I.

Bedingung.

Die geraden Linien AB, CD (XLVII.

fig.) stehen beyde auf der Ebne EF senkrecht.

Behauptung.

AB ist der Linie CD gleichlaufend.

II.

Bedingung.

Es seyen AB und CD gleichlaufend, u. AB, stehe auf der Ebne EF senkrecht.

Behauptung.

Die andere CD steht auf dieser Ebne EF, auch senkrecht.

Vorbereitung.

1) Man ziehe BD, und AD;
2) auf BD aber das Loth DG,
3) mache solches = AB, und
4) ziehe AG.

Beweis.

Für I.

Nun ist

W. ABD = BDG (= R, [Bed. und Vorb. 2.])

BD = BD

und da auch

AB = DG (Vorb. 3.)

so ist

Δ ABD = Δ BDG (2. S.)

folglich:

AD = GB

überdieß

überdieß

AG = AG
AB = BG

Also:

△ AGD = △ AGB (4. S.)

Folglich:

W. GDA = ABG
= R (II. Th. 1. Erkl.)
= GDB (Vorb. 2.)
= GDC

daher steht GD nicht nur auf BD, sondern auch auf AD und DC senkrecht; folglich liegen gedachte Linien in einer Ebne CDBA (45. S. Z.) in der auch AB ist (weil von ihr zween Puncte A, B darinne sind, folglich AB selbst [II. Th. Grundſ.]) Also sind ꝛc. (S. Buch.)

46. Satz. 1. Zusatz.

Bedingung.

Es seyen (fig. LII.) die beyden Linien AB, CD mit der dritten EF, parallel.

Behauptung.

B werden alle drey unter sich gleichlaufend seyn.

Vorbereitung.

1) Man nehme in EF einen beliebigen Punct G;
2) durch diesen ziehe man auf FE in der Ebne FEAB die Linie GH und in der Ebne FDCE die Linie GI senkrecht (7. Satz) und

3) lege durch H, G, I, die Ebne KL;

Beweis

Da nun FG auf diese Ebne senkrecht steht (2, 3. Vorb.); und BH mit FG, gleichlaufend ist (Bed.); so steht auch darauf BH senkrecht, (46. S. II.) Aus gleicher Ursache auch DI: Also sind BH, DI mit einander gleichlaufend (46. S. I.): Folglich alle drey unter sich.

46. Satz. 2. Zusatz.

[Auf der 7ten Zeile dieses Zusatzes setze man vor das Wort: sind, das Wort: so.]

46. Satz. 4. Zusatz.

Aus . . . . . **Puncte Q.]**

Der Punct Q soll (wie schon die Figur zeigt) in der Ebne BC liegen.

46. Satz. 5. Zusatz.

Eben . . . . . (12. S. 1. Z.)]

Denn könnten aus dem Puncte Q in der Ebne BC, auf BC zwey Lothe aufgerichtet werden, so müßte, wenn man aus einem Puncte A ausserhalb BC auf diese Ebne ein Loth AI fällte, dieß Loth mit beyden durch Q gehenden Perpendikeln gleichlaufend seyn. (46. S. I.) Also gäbe es mit einer Linie AI, durch einen Punct Q zwo Parallelen; welches aber, vermöge 12. Satzes 1. Zusatz nicht seyn kann.

auch . . . . . (9. S. 10. Z.)]

So ist das Loth AI die kürzeste Linie, die sich von dem Puncte A, bis an die Ebne BC, ziehen läßt:

Denn

Denn jede andere Linie AF von A auf BC ist größer als AI (9. S. 10. Z.)

Man kann also auch das Loth, AI die Entfernung des Punctes A von der Ebne BC nennen.

46. Satz. 6. Zusatz.

Wenn man aus einem Puncte A ausserhalb der Ebne BC auf sie ein Loth AI fällt, dann in dieser Ebne eine Linie, DE, zieht, und aus A auf diese die Linie AF senkrecht führt; so ist die durch die Puncte F, I, (wo AF und AI in BC eintreffen) gehende Linie FI auf DE senkrecht.

Denn wäre dieß nicht; so wird eine andere durch F gezogene Linie auf DE senkrecht seyn. Gesezt diese wäre Fi (XLVIII. fig.); so wird ein Loth Ai auf Fi gefällt, nach dem 3. Zusatze auf diese Ebne BC senkrecht seyn; Aber AI ist auch auf BC perpendikulär, wie vorausgesezt worden: Also könnten aus A auf BC zwey Perpendikel gezogen werden; welches vermöge vorigen Zusatzes nicht geschehen kann.

46. Satz. 7. Zusatz.

Denn sonst . . . . . den 5. Zus.]

Wenn AF nicht auf DE senkrecht stehet; so kann man darauf aus A ein anderes Perpendikel fällen. Dieß sey Af, (fig. LIII.) Nun ziehe man in der Ebne BC auf DE durch f, den Punct, wo Af in DE einschneidet, das Loth fi, so ist dieses mit FI gleichlaufend (Bed. und 11. S.) und ein Perpendikel aus A auf fi, steht auf der Ebne BC senk-

recht (3. Zus.), desgleichen auch AI: Also gäbe es aus einem Puncte A über der Ebne BC, auf sie zwey Perpendikel; welches den 5. Zusatz entgegen ist.

46. Satz. 8. Zusatz.

Anfänger werden diesen Zusatz leicht verstehen, wenn sie die LIV. Figur vor Augen haben, wo DG die andere Ebne ist, und übrigens einerley Buchstaben mit der 108. Figur, einerley bedeuten. Indessen dürfte noch von: es ist also ꝛc. bis zu Ende, eine kurze Erläuterung nicht überflüssig seyn.

Der Winkel IAF ist also spitzig. Dieser Winkel aber ist der, den IA mit der andern Ebne DG macht. (II. Th. 1. Erkl. und Verz.) Es steht also AI nicht auf der Ebne DG, sondern nur auf der Ebne BC, welche von jener geschnitten wird, senkrecht: Folglich steht einerley gerade Linie AI auf zwo einander schneidende Ebne DG, BC, nicht zugleich senkrecht.

Steht aber eine Linie auf zwo Ebnen zugleich senkrecht; so sind dieselben parallel.

Denn wären sie es nicht; so müßten sie einander schneiden; Also stünde eine Linie auf zwo einander schneidende Ebnen senkrecht. Dieß kann aber nicht seyn.

46. Satz. 9. Zusatz.

Die LV. Figur wird zum deutlichen Verständniß dieses Zusatzes dienen, wobey zu merken

daß der Punct A ausserhalb der Ebne BC gegeben ist.

.... mit jeder ..... durch A]

Nämlich mit IF die Linie if, mit IL die il.

..... sind in einer Ebne]

Nämlich in der Ebne bc, die f, a, l, gelegt worden.

46. Satz. 10. Zusatz.

Dieser Zusatz enthält drey Sätze:

1) **Eine Linie kann nicht in einem Puncte zugleich auf zwo Ebnen senkrecht stehen.**

So kann AB (fig. LVI.) in C nicht zugleich auf der Ebne HI und FG, die einander in ed schneiden, (I. Th. 11. Erkl.) senkrecht seyn.

Denn die beyden Ebnen schneiden, (vermöge der Bedingung) einander. Stünde nun AB auf beyden in C senkrecht: so könnte folglich einerley gerade Linie auf zwo einander schneidenden Ebnen senkrecht stehen; welches wider den 8. Zus. ist.

2) **Durch einen gegebenen Punct (A *) geht mit einer Ebne (BC) nur eine Ebne (bc) parallel.**

Denn giengen durch A zwo Ebnen parallel mit BC; so stünde AI auf beyden in einem Puncte A senkrecht (9. Z.); dieß kann aber nicht seyn (1).

3) **Eine**

*) Fig. LV.

3) **Eine Linie (AI) die auf eine (BC) von zwo parallelen Ebnen (BC, bc) senkrecht steht, steht auf der andern (bc) auch senkrecht.**

Denn stünde AI nicht auf bc senkrecht; so könnte man durch A mit BC eine parallele Ebne legen (9. Z.): Also giengen durch einen Punct zwo Ebnen mit BC parallel; welches nicht geschehen kann (2).

47. Satz.

Bedingung.

Die gerade Linie AI sey auf der Ebne BC senkrecht, und durch AI eine Ebne, wie ML (LVI. fig.) gelegt, welche BC in KL schneide.

Behauptung.

So steht ML auf BC senkrecht.

Vorbereitung.

Durch I, den Punct, wo AI in BC eintrift und welcher in dem Durchschnitte KL liegt, ziehe man in BC auf KL das Loth IF;

Beweis

So sind AI und IF zwey Perpendikel aus einem Puncte des Durchschnitts beyder Ebnen, das eine AI liegt in LM, das andere IF in BC; daher ist der Winkel FIA dieser Ebnen **Neigungswinkel** (II. Th. 2. Erkl.); welcher aber = R ist, weil AI auf jede in BC gezogene Linie IF senkrecht stehet. (II. Th. 1. Erkl.) Also steht LM auf BC

senk-

senkrecht. (II. Th. 2. Erkl.) Folglich jede Ebne durch BC, weil LM jede seyn kann.

47. Satz. 1. Zusatz.

Anfänger werden diesen Zusatz leicht verstehen, wenn sie die LVII vor Augen haben, wo die Ebne durch KL und A, die Ebne LM ist.

47. Satz. 2. Zusatz.

Wenn (fig. LVII.) die Ebne LM auf der Ebne BC senkrecht stehet, und man in LM einen Punct A über BC annimmt, von solchen auf BC das Loth AI fällt; so kann solches kein anderes seyn, als das, welches auf beyder Ebnen Durchschnitt fällt; weil aus A ein Loth in LM auf KL gefällt, auf BC senkrecht steht (1. Z.) und es von einem Puncte A auf BC nicht zwey Perpendikel giebt (46. S. 5. Z.):

Also liegt ein solches Loth, wie AI in der senkrechten Ebne LM.

47. Satz. 3. Zusatz.

Wenn die Ebne BC von einer senkrechten Ebne LM in KL geschnitten wird, so steht jedes Loth IA das man aus einem Puncte I in KL, in der Ebne LM auf KL, aufrichtet, auf BC senkrecht.

Denn es sey FI aus eben dem Puncte I, an KL in BC senkrecht gezogen; so ist der Winkel FIA = R, weil dieser Winkel der beyden Ebnen BC, LM Neigungswinkel, (II. Th. 2. Erkl.) ist, der aber = R angenommen: Also ist AI ein Perpendikel

pendikel auf BC (II. Th. 1. Erkl.) und aus I auf BC giebt es nur ein Loth IA. (46. S. 5. Z.)

47. Satz. 7. Zusatz.

Der beyden Ebnen (fig. LVIII.) BC und GH (welche leztere die Ebne DAE im Buche ist) Durchschnitt DE steht auf der Ebne KM ihres Neigungswinkels IFA, senkrecht.

Denn IF und FA sind Perpendikel auf DE, (II. Th. 2. Erkl.) welche beyde in der durch I, F, A gehenden Ebne KM liegen (II. Th. Grundsz.): Also steht DF auf zwo in der Ebne KM durch F gehende Linien senkrecht; folglich auf KM selbst (45. S.)

Da also DE auf KM senkrecht ist, und die Ebne BC sowohl als die GH durch DE geht; so stehen beyde Ebnen auf KM senkrecht, so wie KM auf jenen beyden. (47. S.)

47. Satz. 5. Zusatz.

Wenn (fig. LIX.) **der Neigungswinkel der beyden Ebnen** dm, dl, **dem Neigungswinkel der zwo Ebnen** BC, BD, (BD **ist die Ebne** ADE **im Buche**) **gleich ist: so kann man sie mit ihren gemeinschaftlichen Durchschnitten** de, BE, **so aneinander setzen, daß die eine Ebne** BD **mit der einem** dm, **die andere** BC **mit der andern** dl, **in eine Ebne fällt.**

Denn es sey der Ebnen dm, dl Neigungswinkel afi, der der Ebnen BD, BC aber, AFI; und beyde gleich.

Nun

Nun lege man in Gedanken die Ebne dl, so in die Ebne BC, daß de, längst BE (im Buche ist dieser Durchschnitt DE genennt) und f auf F fällt;

So fällt fi längst FI, weil ∠ (verm. II. Th. 2. Erkl.) if l = R = IFE.

Ferner stelle man sich durch a, f, i sowohl als A, F, I eine Ebne vor, so hat man die Ebnen der Neigungswinkel afi, und AFI. Diese beyden Ebnen stehen über FI, oder auch fi, auf einer Ebne BC, oder dl, senkrecht (4. Zusatz) und fallen also in eine Ebne, in welcher fa und FA auf einander fallen müssen; weil ifa = IFA und diese Winkel in gleichgedachter Ebne liegen, daher nothwendig einander decken müssen. (I. Th. 4. Grundsatz.)

Nun liegt aber fa in der Ebne dm, und FA in der Ebne BD; und weil so fa auf FA fällt; so müssen auch beyde Ebnen dm, BD in eine fallen.

47. Satz. 7. Zusatz.

... so ist auch cfi = R]

Weil die Durchschnitte de und kl als parallel angenommen worden, und von fi so geschnitten werden, daß lio = efi (12 S. 2. B); aber lio = R.

... so ist ..... senkrecht (45. S.)]

Da af und fi auf fe oder de Perpendikel, jenes in der Ebne dm dieses in der Ebne dl, sind; so ist afi der Neigungswinkel der Ebnen dm, und dl. (II. Th. 2. Erkl.)

Stellt

Stellt man sich nun durch a, f, i, eine Ebne, die Ebne gedachten Neigungswinkel, gelegt vor, so liegen die Linien fa, fi, in dieser Ebne, und fe steht auf beyden senkrecht, folglich auch auf der Ebne afi. (45. S.)

... weil ..... steht (46. S.)]

Denn fe und il sind Parallelen; und wenn eine von zwo Parallelen auf einer Ebne senkrecht steht, so steht darauf auch die andere senkrecht. (46. S. II.)

... und ..... gegen dl]

Eben weil uil = R und fio auf il oder kl senkrecht ist, daher ui und io Perpendikel durch einen Punct i auf den Durchschnitt kl beyder Ebnen kn und dl sind, (welche leztere Ebne man sich gegen o zu, verlängert denken muß); jenes Perpendikel, ui, in kn, dieses, io, in dl; also ist uio gedachter Ebnen Neigung. (II. Th. 2. Erkl.)

Ein Perpendikel ..... oder uio]

fa, iu, liegen in einer Ebne, nämlich in der, die man sich durch a, f, i gelegt, vorstellen muß, d. i. in der Ebne des Neigungswinkel afi, oder uio, und beyde sind einander gleichlaufend. Nun denke man sich von a auf iu ein Loth gefällt; so steht dieses nach des 12. Satzes 5. Zusatz auch auf af senkrecht, und liegt in der durch a, f, i gehenden Ebne, weil a, und der Punct wo dieses Loth, die Linie iu schneidet, darinne liegt. (II. Th. Grundſ.)

47. Satz. 8. Zusatz.

Anfängern wird dieser Zusatz deutlich seyn, wenn

sie

sie die 128 Figur mit der LX. vergleichen, wo einerley Buchstabe einerley bedeutet.

48. Satz.

Dieser Satz ist vollkommen deutlich, so bald man die LXI. Figur vor Augen hat.

Im Buche gehört dazu die 108 Figur.

Von den Kugelschnitten. *)

49. Satz.

Bedingung.

Durch die Kugel PBQGP, (welche hier und in ähnlichen Fällen, im Durchschnitte gezeichnet ist) stelle man eine Ebne BEG gelegt, vor;

Behauptung.

So giebt der Durchschnitt dieser Ebne mit der Kugeloberfläche, einen Kreis BEFGB. **)

Vorbe-

*) Jede Ebne die einen Körper schneidet, hat mit seiner Oberfläche nur eine Linie gemein. (II. Th. 2. Erkl. Anmerk.) Diese Linie die so entsteht, ist eine krumme Linie, wenn des Körpers Oberfläche krumm ist. Sie heißt ein Schnitt mit Beysetzung des Körpers Namen, den sie schneidet. So heißt sie ein Kugelschnitt oder Kegelschnitt, nachdem der Körper, der die Ebne schneidet, eine Kugel oder Kegel ist.

**) Anfänger werden sich erinnern daß hier und in ähnlichen Fällen der Kreis perspectivisch vorgestellt werden muß.

Vorbereitung.

1) Aus der Kugel Mittelpuncte, fälle man auf die schneidende Ebne das Loth DH;

2) Nun nehme man im Umkreise des Schnitts (dessen Puncte alle in der Kugeloberfläche liegen müssen) zween willkührliche Puncte E, F, an, und ziehe darnach aus D, der Kugelmittelpuncte, die geraden Linien DE, DF, und aus H, dem Puncte, wo DH in die schneidende Ebne eintrift, die geraden Linien HE, HF.

So ist

Beweis.

DE = DF.

(denn DE und DF sind Halbmesser der Kugel, diese aber sind gleich [II. Th. Th. 6. Erkl. Zus.])

W. DHE = DHF = R (Vorb. 1.)

Also die Dreyecke DHE, DFH rechtwinklichte. (I. Th. 15. Erkl.) Folglich:

$$\left.\begin{aligned} HEq &= DEq - DHq \\ HFq &= DFq - DHq \end{aligned}\right\} \text{(15. S.)}$$

Aber

$$DEq - DHq = DFq - DHq$$

(eben weil DF = DE,) also

$$HEq = HFq$$

oder ꝛc. (S. Buch.)

Geht ..... gleich]

Man muß sich erinnern, daß alle Puncte eines Schnitts Umkreises, in der Kugeloberfläche liegen,

gen, und daher alle von ihrem Mittelpuncte gleich weit abstehen. (II. Th. 6. Erkl. Zus.)

49. Satz. 1. Zusatz.

Jeder ..... beschreibet]

Weil eines jeden solchen Kreises Halbmesser kleiner als der Kugel ihrer ist.

Denn HE, des Kreises BEFGB Halbmesser, < DE, der Kugel PBQGP Halbmesser. (9. S. 6. Zus.)

Jeder ..... Größten]

Alle Schnitte durch der Kugel Mittelpunct, geben gleichgroße Kreise, weil alle zum Halbmesser, den der Kugel haben.

Ein solcher Kreis aber ist der größte unter allen andern Kreisen auf der Kugeloberfläche, und heißt deswegen ein größter Kreis.

49. Satz. 6. Zusatz.

.... also wäre ꝛc.]

Wenn nämlich nicht dieser Kreise Mittelpuncte der Kugel ihrer wären.

49. Satz. 8. Zusatz.

Auf der lezten Zeile dieses Zusatzes setze man nach dem Worte: also, den Buchstaben H.

49. Satz. 9. Zusatz.

Nur die zween Puncte, die auf der Kugeloberfläche durch das Loth, das man aus eines Kreises Mittelpuncte auf seine Ebne aufrichtet, haben die

Eigenschaft, daß sie von allen Puncten der Peripherie dieses Kreises gleich weit entfernt sind.

Denn hätten noch andere Puncte (auf diesen Kreis bezogen) gedachte Eigenschaft, so müßten alle Linien die von ihnen nach dieses Kreises Mittelpunct gezogen, daselbst auf seiner Ebne senkrecht stehen; welches des 46. Satzes 5. Zusatz entgegen ist.

Der Punct aber der von allen Puncten einer Kreisesperipherie gleichweit abstehet, heißt sein **Pol.**

Also hat jeder Kreis nur zween Pole, welche auf den entgegengesezten Seiten seiner Ebne liegen.

So sind des Kreises BEFGB (109. fig.) Pole P und Q.

49. Satz. 10. Zusatz.

Wenn . . . . . Kugel]

Denn eine solche Ebne hat mit der Kugel nur einen Punct gemein, nicht mehrere, weil es nur aus der Kugel Mittelpuncte auf diese Ebne ein Loth giebt, (vermöge 46. Satzes 5. Zusatz): Also liegen alle andere Puncte ausserhalb der Kugel.

(wie im 41. S. 5, 6. Z.)]

Wie die Tangente mit dem Kreise im 41. Satz. 5, 6. Zus.

50. Satz.

Bedingung.

PQ (109. fig.) sey eine gerade Linie die durch die beyden Pole P, Q. des

des Kreises BEGB geht, und welche dieses Kreises Axe heißt.

Behauptung

Diese steht auf des Kreises BEGB Ebne senkrecht;

Geht durch dessen Mittelpunct H;

und

der Kugel Mittelpunct, D.

Beweis.

Da der Pol P von allen Puncten des Kreises BEGB Peripherie gleichweit absteht; so geht ein Loth von P auf seine Ebne durch seinen Mittelpunct H (49. S. 8. Zus.). Nun giebt es durch H auf diese Ebne nur ein Loth (46. S. 5. Zus.); und ein solches Loth geht sowohl durch den andern Pol Q (49. S. 7. Z.) als der Kugelmittelpunct D (49. S. 4. Z.); weil es nun ꝛc. (S. Buch bis: einerley seyn.)

Dieses Loth aber steht auf des Kreises Ebne senkrecht, geht durch seinen und der Kugel Mittelpunct: Also muß dieß auch von der Linie PQ geschehen.

Hieraus nun, folgt leicht der umgekehrte Satz:

Ein Loth aus des Kreises Mittelpuncte auf seine Ebne, geht durch seine Pole.

50. Satz. 1. Zusatz.

Ein Kreis . . . . . senkrecht]

Weil des Kreises PBQGP Ebne durch die Axe

PQ des Kreises BEGB geht, welche vermöge vorigen Satzes darauf senkrecht steht. (47. S.)

und ist ..... Kreis (49. S. 1. Z.)]

Denn seine Ebne geht durch PQ, und also durch den Mittelpunct der Kugel.

und findet ..... halbiret]

Weil PQ durch des Kreises BEG Mittelpunct H geht, die Ebne des Kreises PBQGP aber durch PQ so geht des leztern Ebne durch H, und schneidet folglich den Kreis BEG in einer Linie die durch den Mittelpunct H geht; das ist ein ꝛc. (S. Buch)

50. Satz. 2. Zusatz.

Dieses ..... wie im 1. Zus.]

Dieses Loth befindet sich in dem größten Kreise, (47. S. 2. Z.) und geht durch des andern Kreises (BEG) Mittelpunct (H) und Pole (P, Q) also ist es leztern Kreises Axe, wodurch der größte Kreis geht: Folglich geht dieser durch jenes Pole; überdieß auch durch dessen Mittelpunct (H) und schneidet ihn, (BEG), folglich in einer Linie die durch seinen Mittelpunkt (H) geht, d. i. im Durchmesser: Also halbiret der größte Kreis den andern.

50. Satz. 4. Zusatz.

Denn der Pol P ist von allen Puncten seines Kreises BEG Peripherie gleich weit entfernt: daher sind alle von diesen Puncten, B, E, durch P gezogene gerade Linien gleich groß: Diese Linien sind aber Sehnen größter Kreises Bogen PB, PE, die zwischen P und B, E, enthalten sind (1. Th. 12. Erkl.): Also sind der Bogen PB, PE, Sehnen

gleich

gleich groß: Folglich die Bogen selbst einander gleich. (22. S. 1. Z.)

52. Satz.

Bedingung.

In der 110. Figur seyen P, Q der Parallelkreise MGHN; KDEL, Pole, und durch sie die größten Kreise PGDQ, PHEQ geführt:

Behauptung.

So sind dieser Parallelkreise Bogen, GH, DE zwischen den größten Kreisen, ähnlich; d. i. sie haben gegen ihre Umkreise einerley Verhältniß.

Beweis.

PQ sey die gerade Linie die durch beyder Parallelkreise Pole P, Q geht. Diese wird also die Ebnen gedachter Kreise in ihren Mittelpuncten F, C schneiden, und darauf senkrecht stehen (50. S.); Folglich auch auf dieser Kreise Durchschnitte FG, CD, FH, CE (11. Th. 1. Erkl.); weil die Ebnen der größten Kreise PGDQ, PHEQ durch PQ gehen, und also die Ebnen von MGHN, KDEL senkrecht schneiden. (49. S. 5. Z.; 50. S. 1. Z.)

Also sind GFP, HFP, DCP, ECP rechte Winkel.

Nun liegen GF, CD in des Kreises PGDQ Ebne, und FH, CE, in der des Kreises PHEQ, daher ist GF der Linie CD, so wie FH der CE, gleichlaufend. (11. S.)

Also haben die Winkel GFH, DCE, parallele Schenkel; folglich sind sie gleich (46. S. 2. Z.) Mithin ihre Maaße, die Bogen GH, DE, ähnlich. (22. S. 6. Z.)

52. Satz. 1. Zusatz.

Da, der Winkel PFG = R
= PFH
= PCD
= PCE

so sind die Linien GF, HF, durch F, und DC, EC, durch C, Lothe auf PQ, dem Durchschnitte der größten Kreise PGDQ, PHEQ, Ebnen, (49. S. 5. Z.) wo in ersterer die Linien FG, CD, in der andern aber die FH, CE, liegen: Also ist sowohl der Winkel GFH, als DCE, die Neigung dieser Ebnen, (oder der Halbkreise PGDQ, PHEQ,) gegen einander (II. Th. 2. Erkl.). Mithin diese Winkel gleich: und GH, DE ähnlich.

52. Satz. 2. Zusatz.

... wenn er durch den Mittelpunct]

Nämlich durch den Mittelpunct der Kugel.

Alsdenn ..... PCD]

Alsdenn ist CD, sowohl als PC des größten Kreises PGDQ, Halbmesser; deren Winkel am Mittelpunct aber, wird durch den Bogen, den sie begränzen, gemessen; (22. S. 6. Z.) also ist PD das Maaß des Winkels PCD, welcher = R ist. (50. S. 1. Z.)

52. Satz. 3. Zusatz.

Theilt man die Parallelkreise MN, KL in ihre 360°; so enthalten die Bogen GH, DE, gleich viel Grade; eben so viel als die ihnen zugehörige Winkel GFH, DCE; welche aber der größten Kreise PGDQ, PHEQ Neigungswinkel sind: Folglich ist ein solcher Bogen wie DE, oder GH das Maaß der beyden größten Kreise Neigung.

Ist nun KDL ein größter Kreis, so ist DE, dieses größten Kreises Bogen, ebenfalls das Maaß der größten Kreise PDQ, PEQ, Neigung; diese hält also so viel Grade ꝛc. (S. Buch.)

Zu dem Maaße des Neigungswinkel solcher Kreise, erwählt man am bequemsten einen Bogen, wie DE, eines größten Parallelkreises, weil dessen Halbmesser dem der Kugel gleichet.

52. Satz. 4. Zusatz.

Eben . . . . . stehet]

Es sey QA des größten Kreises PDQ und QB des größten Kreises PEQ Tangente: so machen diese Tangenten einen Winkel = der Neigung gedachter Kreise.

Denn QP ist der gemeinschaftliche Durchmesser beyder Kreise (49. S. 5. Z.) und die Tangenten stehen in ihres Kreises Ebne, auf ihm in Q senkrecht: daher ist QA mit CD, und QB mit CE, parallel: Folglich der Winkel

AQB = DCE (46. S. 2. Z.)

Sphärische . . . . . 2 R]

Dd, Ee, seyen (fig. LXII.) Bogen größter Kreise, also der Winkel DPE ein sphärischer, dessen Scheitelwinkel ePd, und Nebenwinkel EPd; so ist

1) DPE = ePd
2) DPE + EPd = 180°

Denn, es sey Aa des Bogens Dd; Bb des Bogens Ee, Tangente an P; so ist

DPE = APB,
ePD = bPa;

Aber

APB = bPa

Folglich

DPE = dPe.

Ferner:

DPE = APB
dPE = aPB

Also:

DPE + dPE = APB + aPB

Aber

APB + aPB = 180°

Folglich:

DPE + dPE = 180°.

52. Satz. 5. Zusatz.

Wenn QD, QE, (100. fig.) zweene Quadranten größter Kreise PDQ, PEQ sind, und durch ihre Endpuncte D, E, ein größter Kreis KDEL geht: so steht dieser auf beyde Quadranten senkrecht, und geht durch beyder Pole.

Denn

Denn dieser Kreis KDEL liegt in der Ebne die so wohl durch D, E, als C, der Kugelmittelpunct, geht, (49. S. 1. Z.) und die Ebnen der Quadranten schneidet (49. S. 5. Z.). Dieß geschehe bey QD in CD, bey QE aber in CE; So wird QD des Winkels QCD, und QE des Winkels QCE Maaß seyn, (22. S. 6. Z.) daher beyde Winkel = R: Folglich steht des Kreises KDL Ebne auf PQ (dem gemeinschaftlichen Durchmesser der größten Kreise, zu den die Quadranten gehören) senkrecht (45. S.). Folglich auch auf den Ebnen der größten Kreise PDQ, PEQ, (48. S.) also der Kreis KDEL auf beyde Quadranten QD, QE, senkrecht; und eben deswegen geht auch KDEL durch der Kreise PDQ. PEQ, Pole.

52. Satz. 6. Zusatz.

Wenn zweene Quadranten QD, QE, größter Kreise PDQ, PEQ auf einen größten Kreis KDEL, senkrecht stehen, so gehen PDQ und PEQ durch die Pole von KDEL, (50. S. 3. Z.) welche also in P und Q. den Durchschnittspuncten der beyden Kreise PDQ, PEQ, seyn müssen; weil diese Kreise nur die zween Durchschnittspuncte gemein haben. (49. S. 3. Z.)

52. S. 9. Zus.

. . . so geht KDEL]
ein größter Kreis der auf PQ senkrecht steht.
durch aller Pole.]
Und folglich diese Kreise alle durch die beyden Pole von KDEL.

52. S. 10. Zus.

Es sey (LXIII. fig.) STDEstS ein größter Kreis, der auf PQ dem gemeinschaftlichen Durchmesser der beyden größten Kreise PDQ, PEQ, senkrecht stehet; so geht ersterer durch die Pole der beyden lezteren Kreise.

Nun seyen des Kreises PDQ Pole S, s, und T, t des Kreises PEQ; so ist

$$\left.\begin{array}{r}\text{Bogen } DT + B.\ ST = 90^\circ\\ B.\ TD + B.\ DE = 90^\circ\end{array}\right\} (2.3.)$$

Also:

$$DT + ST = DT + DE;$$
$$DT = DT \text{ abgez.}$$

Folglich

$$TS = DE$$

Eben so erhellet daß

$$ts = DE$$

Hieraus folgt:

Die Entfernung (TS, oder ts) der beyden Pole (T, S; oder t, s) zweener größten Kreise, (PDQ, PEQ) die beyde [nämlich Pole] auf einer Seite der Kreise (PDQ, PEQ) liegen, ist dem spizigen Winkel (DCE) der Kreise gleich; (Eben weil DE, das Maaß dieses Winkels, = TS = ts).

Da der Bogen

$$Sts = 180^\circ (2.3.)$$
$$= St + ts$$

so

so ist

$$St = Stf - ft$$

also, weil

$$ft = DE,$$

$$St = Stf - DE;$$

Folglich:

$$St = 180° - DE$$

= dem Maaß des Nebenwinkels von DCE.

Hieraus hat man den Satz:

Des Pols (S), der auf des ersten Kreises (PDQ) einen Seite liegt und ihm zugehört, Entfernung (St) von des andern Kreises (PEQ) Pole (t) der auf dieses andern Kreises zweyten Seite liegt, ist dem stumpfen Winkel (dem Nebenwinkel von DCE) beyder Kreise (PDQ, PEQ) gleich.

52. S. 11. Zus.

Zweene größte Kreise (PDQ, PEQ [110. fig.]) machen mit einem dritten (PMQ) nicht gleiche Winkel nach einer Seite.

Denn geschähe dieß, so wären die größten Kreise PDQ, PEQ, parallel (47. S. 7. Z.) und könnten einander folglich nicht schneiden, welches doch nach des 49. Satzes 5. Zusatz erfolgen muß.

Die Möglichkeit prismatischer Körper.

Unser H. Autor hat von den prismatischen Körpern Worterklärungen gegeben; daher muß ihre Mög-

lichkeit

lichkeit dargethan werden, welches hier im 53. Satze und dessen Zusätze, die alle von einander abhängen, geschiehet.

53. Satz.

BBCD, 112. fig.]

Nach dieser Figur ist ABCD so die gegebene Grundfläche vorstellt, ein Parallelogramm; allein Anfänger dürfen nicht denken, daß sich die Aufgabe blos hierauf einschränkte. Sie ist in ihrer Art allgemein, und man kann sich daher unter ABCD, eine gegebene Grundfläche, von jeder Gestalt vorstellen, wie gefodert wird.

Diese Erinnerung bezieht sich auch auf ähnliche Fälle. —

Wäre statt der in diesem Satze gegebenen Ebne über der Grundfläche, ein Punct A (124. fig.) gegeben, und zöge man nach Gefallen durch A und jeden Winkelpunct der gegebenen untern Grundfläche BE (124. fig.) gerade Linien CA, BA, FA ꝛc.; so hätte man eine Pyramide.

Denn jede Ebne in der sich ein Paar solcher gezogenen Linien (BA, CA; ꝛc.) befinden, geht durch A und durch die Puncte (B, C) der untern Grundfläche, wodurch dieses Paar Linien geht; (II. Th. Grundſ.) Sie schneidet folglich die Grundfläche in der durch diese Puncte gehende Seite (BC).

Man hat also so viel Dreyecke die alle ihre Spitzen in A haben, als die Grundfläche Seiten hat.

Diese

Diese nebst der Grundfläche begränzen also einen körperlichen Raum, wie des II. Th. 5. Erkl. fodert.

Er ist folglich eine Pyramide.

Und so erhellet die Möglichkeit pyramidalischer Körper.

53. S. 3. Zus.

... die jeder Grundfläche]

Nämlich des Prismatis Grundfläche, was es auch für eine sey.

... und auch ..... sind (12. S. 3. Z.)]

Nämlich in der 112. Figur ist

$AB = \alpha\beta$

$BC = \beta\gamma$

u. s. w.

Denn die Seiten Aa, Bb ꝛc. der Seitenflächen Ab, Bc ꝛc. sind parallel, (53. S.) also liegen die Durchschnittslinien $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ ꝛc. mit ihren Parallelen AB, BC ꝛc. zwischen Parallelen, daher $AB = \alpha\beta$, u. s. w. (12. S. 3. Z.)

... und einerley ..... (46. S. 2. Z.)]

So ist der

Winkel $\alpha\beta\gamma = ABC$

$\beta\gamma\delta = BCD$

u. s. w.

Denn

$\alpha\beta$ ist parallel mit AB

$\beta\gamma$ BC

$\delta\gamma$ DC

u. s. w.

Also

Also sind es solche Winkel wie sie des 46. S. 2. Z. erfodert.

Man sieht also, daß Winkel und Seiten des Durchschnitts mit Winkel und Seiten der Grundfläche nach der Ordnung gleich sind: wenn man also die Durchschnittsfigur auf die Grundfläche legt, daß die gleichnamigen Seiten und Winkel auf einander fallen: so werden beyde Figuren einander decken; folglich einander gleich und ähnlich seyn. (I. Th. 3. Grundſ.)

53. S. 4. Zuſ.

..... der in beyden zugleich]
d. i. in ihrem Durchschnitte wären.

.... unter sich parallel sind (46. S. 1. Z.)]
Folglich können jene Durchschnitte einander nicht schneiden; also auch nicht Ad, Bc.

Ueberhaupt ..... mit Bc parallel]
Denn diese Linien haben gegen AC nach einer Seite, einerley Neigung: Folglich ist der Winkel

$$bBC = aAD$$ (47. S. 8. Z.)

Mithin, (da Bb und Aa gleichlaufend) BC mit AD parallel. (46. S. 2. Z.)

Eben so erhellet, daß AB mit DC gleichlaufend ist.

Nun ist vorhin erwiesen worden, daß, wenn AD mit BC parallel, es auch die Ebne Ad mit Bc, sey:
Und eben so erhellet der Parallelismus beyder Ebnen Ab, DC.

53. S. 6. Zus.

Die ..... AD = BC]

Weil nämlich in diesem Falle die gegenüberstehenden Seiten einander gleich sind, (I. Th. 17. Erkl.) so stehen die einander entgegenstehenden Seitenflächen, über gleiche Grundlinien; sie haben aber auch einerley Höhe, nämlich die Höhe des Parallelepipedi, d. i. die Entfernung der obern Grundfläche von der untern: Folglich sind sie gleich. (14. S. 1. Z.)

53. S. 7. Zus.

... und ABC ..... Neigungswinkel]

und folglich auch auf AB und BC, welche Linien in der Ebne AC liegen, sie sind also Lothe auf dem Durchschnitte Bb der Ebnen Ab, Bc, wie des II. Th. 2. Erkl. verlangt; daher ist ABC, der Neigungswinkel gedachter Ebnen; dieser ist aber auch der Winkel den die Seiten AB, BC der untern Grundfläche, welche hier als ein Rechteck angenommen, mit einander machen; Folglich ist er ein rechter Winkel; Mithin sind die Seitenflächen senkrecht auf einander. (II. Th. 2. Erkl.)

53. Satz. 9. Zusatz.

Eben so ..... darthun]

Denn man kann die im 53. Satze gegebene Ebne der Grundfläche AC gleichfalls nahe oder weit legen, und die Schlüsse bleiben alle ebendieselben, wie daselbst für abcd, weil auch da in sie die Weite der Grundfläche von der gegebenen Ebne keinen Einfluß hat.

53. Satz. 12. Zusatz.

Des Cylinders Grundflächen, sind Kreise. Ein Kreis aber kann man als ein Vieleck von unzählig vielen unendlich kleinen Seiten betrachten. (41. S. 2. Z. XVII) Ist nun EF oder ef unendlich klein, so ist es eine von den Seiten dieses Vielecks: folglich kann man es als gerade, und daher die durch e, E, F, gehende Fläche EFe, als eine unendlich kleine Ebne ansehen, deren unzählig viele die **krumme Seitenfläche** des Cylinders ausmachen, und wovon jede auf der Grundfläche senkrecht stehet, wenn Kk ꝛc. (S. Buch.)

53. Satz. 13. Zusatz.

Der erste Theil dieses Zusatzes enthält den Satz:

Zwey Prismata (Dβ, ∂b) deren Höhen (D∂, ∂d) gleich, und ihre Grundflächen (DB, ∂β) gleich und ähnlich sind, auch ihre gleichnamichten Seitenflächen, (Dγ, ∂c ; Cβ, γb ꝛc.) [oder die, so die Grundflächen (DB, ∂β) in gleichnamichten Seitenlinien (DC, ∂γ; CB, γβ ꝛc.) schneiden,] mit den Grundflächen gleiche Winkel machen, sind gleich.

Denn sie würden einander ꝛc. (S. Buch.)

53. Satz. 14. Zusatz.

... enthält. Und ..... sind]

Gesezt also, D∂ wäre = m . DD, und ∂d = n . DD; so ist das Prisma DB., m mal, in dem Prismate Dβ und n mal in dem ∂b, enthalten: vorausgesezt, daß n und m ganze Zahlen sind. Aber

m . D

$$m \cdot D\mathfrak{B} : n \cdot D\mathfrak{B} = m \cdot D\mathfrak{D} : n \cdot D\mathfrak{D}$$

d. i.

$$D\beta : \partial b = D\partial : \partial d.$$

Ist hingegen DD in ∂D nicht nach einer ganzen Zahl enthalten, oder ist die Verhältniß D∂ : ∂d irrational; so läßt sich der Beweis hier eben so, wie im 24. Satze für Dreyecke und Grundlinien, führen, welchen ich Anfängern wegen, hersetzen will:

Man nenne also das

Prisma	Dβ = α	∂b = ε	D B. = x
die Seitenlinien	D∂ = a	∂d = e	DD = k

Nun findet man allemal durch die Halbirung ein DD so, daß d∂ davon gemessen wird; oder

$$e = nk;$$

sey; ∂D wird wegen der Irrationalverhältnisse zwar nicht von DD gemessen, fällt aber gewiß zwischen zwey Vielfache von ihr, daß also

$$a > mk$$
$$< (m + 1)k$$

Dies schränkt folglich a zwischen zwo Gränzen ein, die nur um k von einander verschieden sind.

Nun kann k durch Halbirungen ohne Ende abnehmen, folglich n ohne Ende wachsen: daher können die Gränzen für a so nahe als man will zusammenrücken, und folglich läßt sich allemal ein k finden, von dem D∂ oder a zwar nicht in völliger Schärfe, aber doch der Wahrheit so nahe als man will, gemessen werden kann.

So hat man also wieder Rationalverhältnisse, die der D∂ : ∂d, oder a : e, so nahe als man will, kommen.

Weil aber jeder Theil, wie DD, in den Prismen Dβ, ∂b, Theile wie DB giebt; so erhellet daß sich eben diese Rationalverhältnisse, der Verhältniß Dβ : ∂b, oder α : ε so nahe als man will, nähern.

Hieraus läßt sich schon übersehen, daß Dβ : ∂b = D∂ : ∂d, obgleich D∂ : ∂d irrational ist.

Man kann aber die ganze Sache völlig überzeugend so darstellen.

Da

$$a \gtrdot mk \lessdot (m + 1)\,k$$

so ist auch

$$\alpha \gtrdot m\varkappa \lessdot (m + 1)\,\varkappa$$

Folglich

$$\frac{a}{e} \gtrdot \frac{mk}{nk} \lessdot \frac{(m + 1)\,k}{kn}$$

d. i.

$$\frac{a}{e} \gtrdot \frac{m}{n} \lessdot \frac{m + 1}{n}$$

und

$$\frac{\alpha}{\varepsilon} \gtrdot \frac{m\varkappa}{n\varkappa} \lessdot \frac{(m + 1)\,\varkappa}{n\varkappa}$$

oder

oder

$$\frac{\alpha}{\varepsilon} > \frac{m}{n} < \frac{m+1}{n}$$

Wäre nun

$$\alpha : \varepsilon \text{ un} = a : e$$

so sey

$$a : e > \alpha : \varepsilon$$

also

$$\frac{a}{e} > \frac{\alpha}{\varepsilon};$$

überdieß sey

$$\frac{a}{e} = \frac{m}{n} + x$$

(weil $\frac{m}{n} < \frac{a}{e}$, und also zu $\frac{m}{n}$ etwas gesezt werden muß, um $= \frac{a}{e}$ zu werden);

$$\frac{\alpha}{\varepsilon} = \frac{m}{n} + y$$

(aus eben der Ursache wie bey $\frac{a}{e}$); so ist

$$x > y$$

(ebeu weil $\frac{a}{e} > \frac{\alpha}{\varepsilon}$ angenommen)

folglich

$$\frac{a}{e} - \frac{\alpha}{\varepsilon}, \left[= \left(\frac{m}{n} + x\right) - \left(\frac{m}{n} + y\right) \right] = x$$

$\equiv x - y$

welches eine angebliche Größe seyn muß, woferne beyde Verhältnisse ($a : e$; $\alpha : \varepsilon$) und daher beyde Quotienten $\left(\frac{a}{e}; \frac{\alpha}{\varepsilon}\right)$ unterschieden sind.

Es ist aber

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} < \frac{1}{n}$$

Folglich auch

$x - y$.

Nun kann n ohne Ende wachsen, also $\frac{1}{n}$ ohne Ende abnehmen, mithin, $x - y$, $\left(= \frac{a}{e} - \frac{\alpha}{\varepsilon}\right)$ kleiner als jede angebliche Größe, werden.

Folglich läßt sich zwischen beyden Verhältnissen $\alpha : \varepsilon$; $a : e$, kein Unterschied angeben; d. h.

$$\alpha : \varepsilon = a : e$$

oder

$$D\beta : \partial b = D\partial : \partial d.$$

53. Satz. 15. Zusatz.

Es sey (fig. LXV.) de des Prismatis' ∂b Höhe, oder das Loth von d auf seine Grundfläche $\partial\beta$, und $\partial\varepsilon$ die Höhe des Prismatis $D\beta$; so ist

$$D\beta : \partial b = \partial\varepsilon : de;$$

Oder: wenn zwey Prismata gleiche Höhen und gleiche und ähnliche Grundflächen haben, überdieß die ähnlich liegenden Seitenlinien der Prismen, (d. h. die,

h. die, die durch ähnlich liegende Winkelpuncte der Grundflächen gehen) gleiche Neigungswinkel mit den Grundflächen machen, (oder, [welches einerley,] ähnlichliegende oder gleichnamichte Seitenflächen gegen die Grundflächen einerley Neigung haben); so verhalten sich diese Prismata wie ihre Höhen.

Denn der Winkel

$$dde = \delta De \text{ (47. S. 8. Z.)}$$
$$de\delta = \delta\varepsilon D \ (= R)$$

Folglich:

$$\delta de = D\delta e \text{ (13. S.)}$$

Also:

$$\Delta\, dde \backsim \Delta\, D\delta\varepsilon \text{ (27. S. Z.)}$$

Folglich:

$$D\delta : \delta d = \delta\varepsilon : de$$

Aber

$$D\beta : \delta b = D\delta : \delta d \text{ (vor. Z.)}$$

Mithin

$$D\beta : \delta b = \delta\varepsilon : de.$$

Ist das ꝛc. (S. Buch.)

53. Satz. 16. Zusatz.

Vielleicht dient Anfängern die LXVI. fig. zur deutlichern Einsicht dieses Zusatzes.

Ueberhaupt versteht man ihn leicht, wenn man sich nur die Figur gehörig vorstellt; dabey sich erinnert, daß man die Ebnen, (hier in der Figur die Ebne DG, RK, ꝛc.) unbestimmt groß, denken kann.

Die Ausmessung der Körper.

54. Satz.

Zwey ..... gleichen Inhalts]

Solche Parallelepipeda wie im vorigen Zusatze, stehen auf einerley Grundfläche, haben gleiche Höhen, und zwo gegenüberstehende Seitenflächen des zweyten Parallelepipedi fallen mit zwo dergleichen Seitenflächen des ersten, in einerley Ebne; oder, welches eben das, zwo entgegengesezte Seitenflächen des einen fallen mit zwoen ähnlich liegenden, des andern Parallelepipedi in einerley Ebne.

Also heißt der Satz:

Zwey Parallelepipeda die über einerley Grundfläche in gleicher Höhe stehen, und von den zwo Seitenflächen des einen mit zwo ähnlich liegenden des andern Parallelepipedi in eine Ebne fallen, sind gleichen Inhalts.

Also:

Bedingung.

HCDK, FABK, (fig. LXVI.) seyen zwey Parallelepipeda, die über einerley Grundfläche HG in gleicher Höhe stehen, und wovon die gegenüberstehenden Seiten FA, HN des Parallelepipedi FABK, mit den ähnlich liegenden FC, HT des andern Parallelepipedi HCDK, nämlich FA

mit

mit FC, und HN mit HT in einer-ley Ebne fallen.

Behauptung.

So sind die beyden Parallelepipeda gleichen Inhalts.

Beweis.

..ein Prisma BSMLCT **ein. Eben... Prisma]**
Das dreyseitige Prisma BSMLCF stellt die LXVII. fig. vor; und das LMKHFG die LXX. fig.

Ferner ꝛc.]
Das Prisma DRHFBS stellt die LXVIII. fig. dar, aber das Prisma CTKGAN die LXIX. Figur; und beyde gehörig verbunden, die LXXI. Figur.

Von diesen beyden ..... BSML]
Nun besteht das Prisma DRHFBS, aus dem Körper CMLHDT und Prisma BSMLCT, desgleichen das Prisma CTKGAN aus dem Körper BMLSAK, und Prisma BSMLCT.

Nimmt man daher (LXXI. fig.) das Prisma BSMLCT von dem Prismate DRHFBS so wohl als dem Prismate CTKGAN weg; so bleiben diese beyden Körper übrig, die gleich sind, und welche die LXXII. Figur verbunden und die LXXIV. einzeln vorstellt; die Ebnen, die ꝛc. (S. Buch)

Zu jeden dieser ꝛc.]
Sezt man in der LXXII. fig. zu jeden dieser beyden gleichen Körper das Prisma LMKHFG (LXX. fig.) so kommen gleiche Summen: dieß

sind aber die beyden Parallelepipeda, deren Gleichheit bewiesen werden sollte, und in der LXXIII. fig. vorgestellt werden. Denn der Körper

RFHLMER + Prisma LMKHFG =

dem Körper BMLKAS + Prisma LMKHFG

d. i. das Parallelepipedum HCDK = dem Parallelepipedo FABK.

55. Satz.

Die LXXV. Figur wird vielleicht Anfängern zur deutlichen Einsicht dieses Satzes dienen. Die Buchstaben die daselbst mit der 115. oder LXVI. Figur einerley sind, haben auch einerley Bedeutung.

Das Parallelepipedum, PKVF das mit schwachen Linien gezeichnet ist, ist so, wie es dieser 55. Satz verlangt. Es ist vorgestellt, als wenn es über der Grundfläche FK seitwärts hinter dem Parallelepipedo DKCH läge.

53. Satz. 1. Zusatz.

Denn alle Parallelepipeda, wie sie dieser Zusatz verlangt, sind entweder den 54. oder 55. Satz gemäß.

56. Satz. Beweis.

Man lasse Kh, Gf senkrecht auf HF (oder dessen Verlängerung, wie in der 117. Figur); so ist auch hK und fG auf KG senkrecht (12. S. 5. Z.) und KhfG ein Rechteck (12. S. 9. Z.) das mit dem Parallelogramm KHFG über einerley Grundlinie KG und zwischen einerley Parallele Hf mit der Grundlinie, steht; Also KhfG = KHFG (14. S.).

Man

Man ziehe nun auf HF in der Ebne HD Perpendikel hr, fd bis an RD (oder dessen Verlängerung); Diese werden auf der Ebne KF senkrecht seyn (47. S. 1. Z.);

Ferner sind Tr, Cd, der Ebnen Th, Cf Durchschnitte mit der Ebne TD.

Da nun die Ebne HG, mit der Ebne TD gleichlaufend ist (53. S. 4. Z.), so ist hK mit rT, und fg mit dC (II. Th. 2. Erkl. Z.), also auch rT mit dC parallel (46. S. 1. Z.); und, weil weil RD mit TC; HF mit GK gleichlaufend ist, (indem RC und HG Parallelogramme sind); so ist vermöge 12. Satzes 3. Zusatz

$$rT = dC$$
$$dC = fG$$
$$fG = hK$$

also diese Linien alle unter sich gleich: Aus eben der Ursache ist

$$rd = CT$$
$$= RD;$$

und die Winkel CdD, GfF sind solche, wie sie des 46. Satzes 2. Zusatz verlangt; folglich

$$CdD = GfF.$$

Aus eben der Ursache ist auch

$$GfF = TrR$$

Aber

$$GfF = 90°$$

(weil Gf auf HF senkrecht gezogen): Folglich auch

$$CdD \text{ sowohl als } TrR = 90°$$

ist

Also ist TrdC ein Rechteck (12. S. 9. Z.) das, dem untern KhfG gleich und ähnlich ist (14. S. 1. Z. und I. Th. 19. Erkl.).

Aus gleicher Ursache ist

das Rechteck dfhr dem Rechteck CGKT

dCGf rTKh

gleich und ähnlich;

Da nun die vier Linien rh, fd, CG, TK parallel sind, so sind auch dhfr und CGKT, imgleichen dCGf und rTKh, so wie rC und hG, gleichlaufend, (53. S. 4. Z.) und alle diese Rechtecke, schließen folglich ein rechtwinklichtes Parallelepipedum (53. S. 6. Z.) ein.

Dieses hat nun ꝛc. (S. Buch).

56. Satz. 1. Zusatz.

Denn Grundflächen von gleichen Inhalt sind entweder einander ähnlich, oder nicht. Ist erstes; so erhellet die Sache aus des 55. Satzes 1. und 2. Zusatze; ist aber das andere, so sind die Parallelepipeda schief oder senkrecht.

Im ersten Falle ist jedes schiefe einem senkrechten über eben der Grundfläche in einerley Höhe, gleich (55. S. 2. Z.); aber jedes senkrechte hat mit einem rechtwinklichten von eben der Höhe, und dessen Grundfläche so groß wie jenes Grundfläche, einerley Inhalt (56. S.); im zweyten Falle, folgt die Sache unmittelbar aus izt angeführtem Satze.

56. Satz. 2. Zusatz.

Aus des 53. Satzes 15. Zusatz erhellet: daß sich senkrechte Parallelepipeda wie ihre Höhen verhalten, wenn ihre Grundflächen gleich und ähnlich sind.

Hier aber wird dargethan, daß auch senkrechte Parallelepipeda sich wie ihre Höhen verhalten, wenn ihre Grundflächen nur gleich, aber nicht ähnlich sind.

Denn das Parallelepipedum FGCDRHKT der 117. Figur, (das CH heißen mag) und das ABHEFDCG der 118. Figur (so wir HD nennen wollen) seyen senkrecht und jenes Grundfläche FC, dieses Grundfläche AH, gleich aber nicht ähnlich; Ihre Seitenlinien stehen also senkrecht auf den Grundflächen; daher FH, die Seitenlinie von CH, und AD, die Seitenlinie von HD, dieser Parallelepipeda Höhen sind.

Es soll nun bewiesen werden, daß

$$CH : HD = FH : HD.$$

Vorbereitung.

Auf AD nehme man $AQ = FH$ und lege in Gedanken durch Q eine Ebne mit der Grundfläche parallel.

Beweis.

So schneidet diese von dem Parallelepipedo HD, ein Stück HQ, ebenfalls ein Parallelepipedum, ab, dessen obere Grundfläche in der durch Q geleg-

ten

ten Ebne liegt, und der Durchschnitt dieser Ebne mit HD ist (53. S. 3. Z.) [welchen man sich in der 118. Figur denken oder zeichnen muß]; die untere Grundfläche aber ist des HD Grundfläche selbst. Also hat das Parallelepipedum HQ mit dem Parallelepipedo CH gleiche Grundflächen und Höhe (Bed. und Vorb.); Folglich ist

$$HQ = CH \text{ (56. S. 1. Z.)}$$

Aber vermöge 53. Satzes 15. Zusatz ist

$$HQ : HD = AQ : AD$$

und folglich, (weil $HQ = CH$; $AQ = FH$)

$$CH : HD = FH : AD$$

57. Satz. 1, 2. Zusatz.

Exempel.

Es sey des Parallelepipedums Länge, oder $a =$ 9 Fuß; seine Breite oder $b = 5,7$ Fuß, und dessen Höhe, oder c, $= 10,4$ Fuß: so ist sein Inhalt, oder

$$abc = 9 \times 5,7 \times 10,4$$
$$= 533,52 \text{ Cubikfuß } *)$$
$$= 533 \text{ Cubikfuß und } 520 \text{ Cubikzolle}$$

(weil 1 Cubikfuß $=$ 1000 Cubikzoll, und daher $\frac{52}{100}$ Cubikfuß $= \frac{52}{100} \cdot 1000$ Cubikzoll)

$$= 533520 \text{ Cubikzoll}$$

weil $533,52$ Cubf. $= 533,52 \cdot 1000$ Cubikzoll.

So

*) d. i. ein Würfel dessen Seite $=$ 1 Fuß. So ist eine Kubikruthe ein Würfel dessen Seite $=$ 1 Ruthe. Man wird nun begreifen, was ein Cubikzoll, Cubiklachter ꝛc. sagen will.

So eine Menge Würfel, deren jeder = 1 Cubikzoll, enthält ein senkrechtes Parallelepipedum, wie im Exempel angenommen.

57. Satz. 3. Zusatz.

Nämlich a^3 ist der Inhalt eines Würfels (also der Inhalt eines von den fünf regulären Körpern) dessen Seite = a.

Mißt man daher eines Würfels Seite mit einem bekannten Maasse, z. E. Fuß, und macht die 3te Potenz der Zahl die die Länge des Würfels Seite in dem gebrauchten Maasse ausdruckt; so erhält man dessen Inhalt oder wie viel in ihm solche Würfel enthalten sind, davon jedes Seite = der Länge des gebrauchten Maaßes z. E. Fußes, ist.

57. Satz. 4. und 5. Zusatz.

Ist z. E.

$AK, (= d) = 1'$;

so ist

$a, (= 10 . d) = 10' = 1^\circ$;

Folglich

$a^3, (1000 . d^3) =$ 1 Cubikruthe = 1000 Cubikfuß.

So sieht man, wenn d = 1 Zoll, daß $a^3 = 1$ Cubikfuß, = 1000 Cubikzolle sey; u. s. w.

57. Satz. 6. Zusatz.

Wäre immer noch AK = d; aber a = 12 . d; so ist $a^3 = 12^3\ d^3 = 1728\ d^3$. Ist also $d = 1'$; mithin $a, (= 12\,d) = 1^\circ = 12'$; so ist $a^3, (= 1728\ d^3) =$

d^3) = 1° zwölftheiliges Cubikmaaß = 1728 Cubikfuß, Duodecimalmaaß.

Für d = 1″, ist a^3 = 1 Cubikfuß = 1728 Cubikzoll; u. s. w.

Also: Bey zwölftheilichten Maaße enthält die Cubikruthe 1728 Cubikfuß, der Cubikfuß, 1728 Cubikzoll, der Cubikzoll, 1728 Cubiklinien u. s. w.

57. Satz. 7. Zusatz.

Höhere Maaße bringt man auf niedrige durch die Multiplication; und umgekehrt, niedrige auf höhere durch die Division, und zwar beym Decimalmaaß mit 1000, beym Duodecimalmaaß aber, mit 1728.

Exempel.

1) Für zehntheilicht Maaß.

12678451721^{9} Cubiklinien auf Cubikzolle, Cubikfuß, ꝛc. zubringen.

Man dividire die vorgegebene Zahl mit 1000; so erhält man Cubikzolle, diese mit 1000 dividirt, giebt Cubikfuß, u. s. w.

Also:

$$\frac{12678451721^{9}}{1000}$$ Cubikmaaß

= 12678451 Cubikzoll und 219 Cubiklinien;

$$\frac{12678451^{\prime\prime}}{1000}$$ Cubikmaaß =

12678 Cubikfuß und 451 Cubikzoll;

12678

$\frac{12678}{1000}$ Cubikfuß = 12 Cubikruthen und

678 Cubikfuß.

Folglich

12678451 7219 Cubiklinien =
12° 678′ 451″ 729‴ Cubikmaaß.

Wenn man die vorgegebene Menge Cubiklinien in Klassen von der Rechten nach der Linken, (wie für Cubikzahlen) getheilt, und der ersten Klasse rechter Hand, den Namen Cubiklinien, der gleich drauf folgenden, Cubikzolle, und s. f. gegeben hätte, so würde man gleich das Verlangte erhalten haben.

Es fällt in die Augen, wie man dergleichen Verfahren, bey ähnlichen Fällen anzubringen habe.

b) 12° 678′ 451″ 729‴ Cubikmaaß auf Cubiklinien zu bringen.

Da

12 Cubikruthen = 12 × 1000 Cubikfuß

so ist

12° 678′ Cubikmaaß = 12 × 1000 +
678 Cubikfuß
= 12678 Cubikfuß

Ferner

12678 Cubikfuß = 12678 × 1000 Cubikzoll

Also:

12° 678′ 453″ Cubikmaaß = 12678 ×
1000 + 453 Cubikzoll
= 12678453 Cubikzoll.

Eben so ist

12678453 Cubikzoll + 729 Cubiklinien =
12678453729 Cubiklinien
= 12° 678′ 453″ 729‴ Cubikmaaß.

Man darf also nur die Ziffern der vorgegebenen Zahlen, die die auf einander folgende Cubikmaaße ausdrücken, nach der Ordnung wie sie auf einander folgen, zusammenhängend hinschreiben; so drückt man sie gleich in den dabey gegebenen niedrigen Cubikmaasse aus.

Höheres Cubikmaaß durch einen zehntheilichten Bruch ausgedrückt, z. E. 0, 587612 Cubikruthen, auf niedriges zu bringen.

Da

0, 587612 Cubikruthen = 0, 587612 × 1000 Cubikfuß

so ist

0, 587612 Cubikruthen = 587, 612 Cubikfuß.

Aber

0, 612 Cubikfuß = 0, 612 × 1000 Cubikzoll
= 612 Cubikzolle.

Folglich

0, 587612 Cubikruthen = 587 Cubikfuß und 612 Cubikzoll.

Hätte man 0, 587612 Cubikruthen, von der Linken gegen die Rechte in Klassen zu drey Ziffern getheilt, so hätte man dafür gleichfalls 585′ 612″ Cubikmaaß, erhalten.

Die-

Dieses Verfahren läßt sich in allen ähnlichen Fällen gebrauchen, wobey man zu merken hat, daß wenn der lezten Klasse eine oder zwo Ziffern fehlt, daselbst eine oder zwo Nullen gesezt werden müssen.

II) Für zwölftheilicht Maaß.

c) 12678451729 Cubiklinien, auf höheres Cubikmaaß zu bringen.

Da

$$1 \text{ Cubl.} = \frac{1}{1728} \text{ Cubz. (6. Z.)}$$

so ist

$$12678451729 \text{ Cubl.} =$$

$$12678451729 \times \frac{1}{1728} \text{ Cubz.}$$

$$= \frac{12678451729}{1728} \text{ Cubl.}$$

$$= 7337066 \text{ Cubz. } 1681 \text{ Cubl.}$$

Eben so erhellet, daß

$$7337066 \text{ Cubz.} = \frac{7337066}{1728} \text{ Cubf.}$$

$$= 4245 \text{ Cubf. } 1706 \text{ Cubz.}$$

und

$$4245 \text{ Cubf.} = \frac{4245}{1728} \text{ Cubr.}$$

$$= 2 \text{ Cubr. } 789 \text{ Cubf.}$$

Folglich das Verlangte

$$= 2^{\circ}\ 789'\ 1706''\ 1681''' \text{ Cubmaaß.}$$

d) Wäre diese gefundene Zahl vorgegeben, um sie auf niedriges Cubikmaaß zu bringen; so geschiehet dieß durch

$$[(2^{\circ} \times 1728 + 789') \cdot 1728 + 1706''] \times 1728 + 1681'''$$

(6. Zus.) was so herauskommt sind Cubiklinien; wollte man noch niedrigeres haben; so müßte man noch mit 1728 multipliciren, und man erhält alsdenn Cubikscrupel; u. s. f.

III)

1) Decimalcubikmaaß in Duodecimalcubikmaaß zu verwandeln, dient folgendes Verfahren.

Man bezeichne die Decimalcubikfüsse, Zolle, Linien ꝛc. mit F^3, Z^3, L^3 u. s. w.; beym zwölftheilichten Maase hingegen die ähnlichen Dinge mit f^3, z^3, l^3 u. s. f.; so ergeben sich mit mittelst des 5. und 6. Zusatzes folgende Ausdrücke:

2) 1 Cubikruthe $= 1000\ F^3 = 1728\ f^3$
oder (wegen $F^3 = 1000\ Z^3$; $f^3 = 1728\ z^3$)
$1000 \cdot 1000\ Z^3 = 1728 \cdot 1728\ z^3$

3) und (wegen $Z^3 = 1000\ L^3$; $z^3 = 1728\ l^3$)
$1000 \cdot 1000 \cdot 1000 \cdot L^3 = 1728 \cdot 1728 \cdot 1728\ l^3$

u. s. w.

4) Folglich, wenn man würklich multiplicirt,
$1000\ F^3 = 1728 \cdot f^3$
$1000000\ Z^3 = 2985984 \cdot z^3$
$1000000000\ L^3 = 5159780352 \cdot l^3$
u. s. w.

5) Also

5) Also, aus $1000\,F^3 = 1728\,.\,f^3$ erhält man

$$F^3 = \frac{1728}{1000}\,f^3$$

$$= \left(1 + \frac{728}{1000}\right) f^3$$

$$= f^3 + \frac{728}{1000}\,f^3$$

$$= f^3 + \frac{728}{1000}\,.\,1728\,z^3$$

$$= f^3 + \left(1257 + \frac{984}{1000}\right) z^3$$

$$= f^3 + 1257\,.\,z^3 + \frac{984}{1000}\,.\,z^3$$

$$= f^3 + 1257\,z^3 + \frac{984}{1000}\,.\,1728\,l^3$$

$$= f^3 + 1257\,z^3 + \left(1700 + \frac{352}{1000}\right) l^3;$$

Also

6) $F^3 = f^3 + 1257\,.\,z^3 + 1700,352\,.\,l^3$

Völlig nach eben dem Verfahren findet sich aus den übrigen Gleichungen in (4).

7) $Z^3 = 2\,z^3 + 808,782\,\ldots\,l^3$

8) $L^3 = 5,159\,\ldots\,l^3$

wo die übrigen Decimalbrüche für l^3 der Kürze wegen weggelassen sind.

Exempel.

2 F^3 + 4 Z^3 + 10 l^3 in Duodecimalcubikmaaß zu verwandeln.

Man multiplicire in die Gleichung (6) auf beyden Seiten mit 2; hierauf die folgende Gleichung (7) mit 4, und endlich in der bey (8) mit 10; so erhält man folgende Werthe:

$$2\,F^3 = 2\,f^3 + 2514\,z^3 + 3400,704\,l^3$$
$$4\,Z^3 = \quad 8\,z^3 + 3235,128\,l^3$$
$$10\,L^3 = \quad 51,59\,l^3$$

Addirt man nun die rechter Hand unter einander zu stehen kommenden Zahlen zusammen, und sezt für jede 1728 l^3 ein z^3, und für jede 1728 z^3 ein f^3; so bekommt man

$$2F^3+4Z^3+10L^3=3\,f^3+797\,z^3+1503,422\,l^3$$

9) **Umgekehrt: Duodecimalcubikmaaß in zehntheilichtes zu verwandeln.**

Weil

$$1000\,F^3 = 1728\,f^3;$$

so wird

$$f^3 = \frac{1000}{1728}\,F^3$$
$$= 0,5787037037\,F^3$$
$$= \frac{578}{1000}\,F^3 + \frac{7037}{1000000}\,F^3 + \frac{7037}{1000000000}\,F^3$$
$$= 578$$

$= 578\ Z^3 + 703\ L^3 + 703{,}7\ S^3$ *)

(weil $\frac{1}{1000} F^3 = Z^3$; $\frac{1}{1000000} F^3 = L^3$;

$\frac{1}{1000000000} F^3 = S^3$)

Da

$$1000000\ Z^3 = 2985984\ z^3 \quad (4)$$

folglich

$$\frac{1000000}{2985984} Z^3 = z^3$$

so findet man auf eben die Art

$$z^3 = 334\ L^3 + 897\ Z^3$$

und endlich, wegen

$$1000000000\ L^3 = 5159780352 \cdot l^3$$

oder

$$\frac{1000000000}{5159780352} L^3 = l^3,$$

$$l^3 = 193 \cdot S^3.$$

Herr Prof. Meyer hat in seiner practischen Geometrie ein gleiches Verfahren, für die Reducirung des Längen- und Quadratmaaßes angewiesen.

Man kann sich auch hiezu der Regel Detri auf ähnliche Art wie in der Erl. des 42. S. 9. Zus. gezeigt worden ist, bedienen.

Hat man die Würfel verschiedener z. E. Fußmaaße zu reduciren, so nimmt man aus einer

*) Welches Cub. Decimalscrupel bedeutet.

Vergleichungstafel die ihnen gehörigen Zahlen, sucht die 3te Potenz für sie, und verfährt übrigens nach der Regel Detri.

Z. E. 145 Leipz. Cubf. in Pariser zu verwandeln.

Da 14400 Leipzf. = 12520 Parf.

so ist

$$14400^3 \text{ Leipzf.} : 145 \text{ Cubf.} = 12520^3 \text{ Parf.} : x$$

wobey man mit Vortheil die Logarithmen gebrauchen kann.

57. Satz. 8. Zusatz.

Wenn ..... gesezt ist.]

Hieraus hat man den Satz:

Die Verhältniß, zweyer rechtwinklichten Parallelepipeda ist aus den Verhältnissen ihrer Längen, Breiten und Höhen zusammen gesezt.

Dieses ..... worden]

Wobey man zu merken hat, daß dieß hier ebenfalls nur geschehen ist, um die Sätze in der größten Allgemeinheit abzufassen.

Uebrigens würde gleichfalls die Rechnung unnüzer Weise sehr verwickelt werden, wenn man sich bey Ausmessung der Seiten verschiedener Maaße bedienen wollte.

Man mißt also die drey Seiten eines Parallelepipedi mit einerley Maaße; und wenn man z. E.

die

die Länge in Fussen, die Breite in Fussen und Zollen, und die Höhe in Fussen, Zollen und Linien gefunden hätte, brächte man alles auf Linien.]

57. Satz. 10. Zusatz.

Die Anm. . . . . hier statt.]

1) Welche sagen, aus dem Product dreyer Linien entstehe ein Körper, (ein rechtwinklichtes Parallelepipedum) drücken sich unrichtig aus.

Was man ein Product aus drey Linien nennt, ist eigentlich ein Product aus drey Zahlen, die diese Linien in dem bey ihrer Ausmessung gebrauchten Maaße ausdrücken.

Ein solches Product zeigt die Menge der Würfel an, die ein rechtwinklichtes Parallelepipedum enthält, dessen Länge, Breite und Höhe diese Linien sind, wie dieß deutlich aus dem 57. S. und seinem 1. Zusatz erhellet.

Ueberdieß verhält sich gedachtes Product, zu dem Producte dreyer andern mit eben dem Maaße gemessenen Linien, wie die rechtwinklichten Parallelepipeda, davon des einen Länge, Breite und Höhe, jene drey Linien, des andern aber, diese sind. (8. Z.)

Mehreres hievon findet man im 67. Satze, auf der 366 u. f. Seite.

2) Wäre eine oder zwo von den Zahlen die die Linien der Länge, Breite und Höhe eines rechtwinklichten Parallelepipedi ausdrücken, in Rück-

ficht der andern Irrationale; so giebt das Product dieser Zahlen, ebenfalls den Inhalt.

Denn nach des 24. Satzes Beweise kann man alle Linien ansehen, als hätten sie ein gemeinschaftliches Maaß. Gesezt also AE und AB (118. fig.) ließen sich mit AK (= AO = AN) genau ausmessen, aber nicht AD, sondern AQ wäre das Vielfache von AK, das AD am nächsten kommt, und der Rest QD wäre kleiner als AK *); so ist das rechtwinklichte Parallelepipedum DH (56. S. 2. Z.) größer als die Menge der Würfel die man durch AB . AE . AQ erhält, und zwar um ein kleines rechtwinklichtes Parallelepipedum, das QG heißen mag, und dessen eine Grundfläche FGCD und Höhe QD < AK ist.

Nun kann man AK so klein machen, als man will, folglich QA der Höhe AD so nahe kommen als man will, und das Parallelepipedum QG so klein werden als man will. Verschwindet es also; so drückt AB . AE . AQ. den Inhalt des Parallelepipedi der Wahrheit völlig gemäß aus: Folglich ist AB × AE × AD allezeit der verlangte Inhalt.

58. Satz. 1. Zusatz.

Hieraus hat man den Satz:

Die Verhältniß zweyer Parallelepipeda ist aus den Verhältnissen ihrer Grundflächen und Höhen zusammengesezt.

58. S.

*) Welches man sich freylich denken, oder Q sehr nahe an D rücken muß.

58. Satz. 2. Zusatz.

Ist

$$ab = \alpha\beta$$

so ist

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta}$$

folglich

$$a : \alpha = \beta : b$$

Hierdurch ergiebt sich der Satz:

Bey Parallelepipedis von gleichem Inhalte, verhalten sich die Grundflächen umgekehrt wie die Höhen.

58. Satz. 3. Zusatz.

Wenn zwey Parallelepipeda gleiche Grundflächen, $a = \alpha$, haben; so ist die Verhältniß ihrer Räume, oder

$$ab : \alpha\beta = b : \beta \text{ (Ar. V. 21.)}$$

Daraus erhält man den Satz:

Zwey Parallelepipeda von Grundflächen gleichen Inhalts, verhalten sich wie ihre Höhen.

Sind ihre Höhen gleich, oder $b = \beta$ so ist

$$ab : \alpha\beta = a : \alpha$$

das heißt:

Zwey Parallelepipeda von gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundflächen.

60. Satz.

Hier ist zu merken, daß kein 59. Satz fehlt, sondern

sondern der 60. Satz der 59. und also der 61, 62. ꝛc. der 60, 61. ꝛc. seyn soll.

60. Satz. 2. Zusatz.

Anfänger werden diesen Zusatz leicht verstehen, zumal wenn sie durch die LXXVI. Figur ihrer Einbildungskraft zu Hülfe kommen.

60. Satz. 3. Zusatz.

I) Wäre eines Prismen Höhe = b, Grundfläche = a, so ist sein Inhalt = ba.

Eines andern Prismen Höhe sey = β, Grundfläche = α; also sein Inhalt = βα.

II) Dieser beyden Prismen Verhältniß nun ist
= ba : βα = (b : β) + (a : α) [Ar. VI. 3.]

Das giebt den Satz:

Die Verhältniß zweyer Prismen ist aus den Verhältnissen ihrer Höhen und Grundflächen zusammengesezt.

III) Sind beyde Prismen gleichen Inhalts; so ist

$$ba = \beta\alpha;$$

also:

$$\frac{b}{\beta} = \frac{\alpha}{a};$$

d. i.

$$b : \beta = \alpha : a$$

In diesem Falle, verhalten sich also die Höhen umgekehrt wie die Grundflächen.

IV)

IV) Ist

$$a = \alpha$$

so ist

$$ba : \beta\alpha = b : \beta$$

Oder: Prismen von gleichen Grundflächen, verhalten sich wie ihre Höhen.

V) Für

$$b = \beta$$

hat man

$$ba : \beta\alpha = a : \alpha$$

das heißt:

Prismen von gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundflächen.

60. Satz. 4. Zusatz.

Weil ein Cylinder ein Prisma von unzählich vielen unendlich kleinen Seiten ist (53. S. 12. Z.); so wird sein Inhalt nach dem 3. Zusatze gefunden: dieser ist also ein Product ꝛc. (S. Buch.)

60. Satz. 5. Zusatz.

Dieser Zusatz zeigt wie der Flächeninhalt aller Seitenflächen eines Prismen gefunden werde.

Dieß geschiehet überhaupt, (das Prisma mag senkrecht oder schief seyn,) wenn der Umfang des Prismen Grundfläche in dessen Höhe multiplicirt wird.

Die Oberfläche jedes Prismen besteht aus allen Seitenflächen und den beyden Grundflächen.

Addirt man daher das doppelte des Inhalts des Prismen Grundfläche zu dem Inhalte aller seiner Seitenflächen: so bekommt man den Inhalt des Prismen Oberfläche.

60. Satz. 6. Zusatz.

Wenn . . . . . werden]

Der Umfang eines Kreises dessen Durchmesser = d, ist (nach 44. S.) = d P [wo P = 3, 14 . . .] Also ist der Inhalt der krummen Seitenfläche (die beyden Grundflächen nicht mit gerechnet) eines Cylinders wie dieser Zusatz erfodert, = b . dP = b × d . 3, 141 . . .

Wollte man den Inhalt des Cylinders ganzen Oberfläche; so müßte man den doppelten Inhalt seiner Grndfläche, zu den Inhalt dessen krummen Seitenfläche addiren.

Nun ist seine Grundfläche ein Kreis, und also der ihr Inhalt

$$= \frac{d^2 P}{4} \text{ (44. S.)}$$

Folglich der doppelte Inhalt

$$= \frac{d^2 P}{2}$$

Also der des Cylinders ganzen Oberfläche

$$= b\,d\,P + \frac{d^2 P}{2}$$

$$= (b + \tfrac{1}{2}\,d)\,d\,P$$

$$= 2\,r\,(b + r)\,P$$

(wo

(wo r der Halbmesser $= \frac{1}{2}$ d)

Nach des 60. S. 4. Zusatz findet sich dieses Cylinders körperliche Inhalt $= b \cdot \frac{d^2 P}{4}$ (wie im Buche)

$= b\, r^2 P$ (44. S.)

Alles dieses kann man so scharf als jedesmal nöthig ist, finden, wenn man nur $P = 3,141592653 \ldots\ldots$ (43. S. Anm.) scharf genug ausdrückt.

60. Satz. 7. Zusatz.

Die LXXVII Figur stellt zween solche Cylinder, wie dieser Zusatz verlangt, vor.

Des äußern Halbmesser ist KN und das R im Buche, so wie daselbst das r, des innern Cylinders Halbmesser KP; beyder gemeinschaftlichen Axe aber ist KE, welche, wenn beyde Cylinder senkrecht sind, $= b$, ihrer Höhe.

Einige, wie Herr Hofr. Karsten (Anfangsgr. der Math. I. Th. 351. §. Geom.) heißen solche Cylinder **concentrisch**, das Stück um welches der äußere Cylinder (der über den Kreis N o R) den innern (den über den Kreis POM) übertrift, ist der **cylindrische Ring**; oder die **cylindrische Röhre**.

Des äußern Cylinders Inhalt ist $= R^2 Pb$, und der des innern $= r^2 Pb$; folglich der körperliche Inhalt des cylindrischen Ringes oder der Röhre

$= R^2$

$$= R^2 Pb - r^2 Pb$$
$$= bP (R^2 - r^2)$$

Kolbenröhren, Auffatzröhren ꝛc. gehören zu cylindrischen Röhren. Ihren Inhalt findet man also auch nach dieser izt gefundenen Formel.

Auf ähnliche Art findet sich der Inhalt einer **prismatischen Röhre.** (LXXVIII. fig.)

Man sieht, daß diese so groß ist, als der Unterschied des äußern und innern Prismats.

Wäre also beyder Prismen gemeinschaftliche Höhe $= h$ und des äussern Grundfläche $= B$, des innern aber $= b$; so ist der prismatischen Röhre Inhalt

$$= hB - hb$$
$$= h (B - b)$$

wo $B - b$ der noch übrige volle Theil der Grundfläche ist.

60. Satz. 8. Zusatz.

Des Cylinders im 6. Zusatze Inhalt

$$= \frac{bd^2 . P}{4},$$

aber des in diesem Zusatze,

$$= \frac{\beta d^2 . P}{4}.$$

Also verhält sich jener Cylinder zu diesem

$$= \frac{bd^2 . P}{4} : \frac{\beta d^2 . P}{4}$$

$$= bd^2$$

$$= bd^2 : \beta\delta^2 \text{ (Ar. V. 21)}$$
$$= (b : \beta) + (d^2 : \delta^2) \text{ [Ar. VI. 3.]}$$
$$= (b : \beta) + (dd : \delta\delta);$$

das heißt:

Die Verhältniß zweener Cylinder ist aus den Verhältnissen ihrer Höhen, und den Quadraten ihrer Grundflächen Durchmesser zusammengesezt.

60. Satz. 9. Zusatz.

Wenn diese beyden Cylinder von gleichen Inhalt sind; so ist

$$\frac{bd^2 \cdot P}{4} = \frac{\beta\delta^2 \cdot P}{4}$$

oder

$$bdd = \beta\delta\delta;$$
$$\frac{b}{\beta} = \frac{\delta\delta}{dd}$$

Also

$$b : \beta = \delta\delta : dd$$

Hieraus hat man den Satz:

Bey zween gleichen Cylindern, verhalten sich die Höhen umgekehrt wie die Quadrate ihrer Grundflächen Durchmesser.

60. Satz. 10. Zusatz.

Wenn die Cylinder gleiche Höhen haben; so ist

$$bdd : \beta\delta\delta = dd : \delta\delta;$$

Die leztere Verhältniß ist auch der Verhältniß dieser Cylinder Grundflächen gleich. (44. S. 1. Z; und 53. S. 8. Z.)

Hieraus ergiebt sich nun der Satz:

Cylinder von gleichen Höhen verhalten sich wie die Quadrate ihrer Grundflächen Durchmesser; oder wie die Grundflächen selbst.

60. Satz. 11. Zusatz.

Es sey b die gemeinschaftliche Höhe zweener Cylinder, δ des einen und d des andern Cylinders Grundfläche Durchmesser, (welches eben die Cylinder des 6. und 10. Zus. sind); so ist des einen Inhalt

$$= \frac{bd^2 \cdot P}{4} \text{ (4. Z.)}$$

Der des andern aber

$$= \frac{b\delta^2 \cdot P}{4} \text{ (4. Z.)}$$

Also beyder Cylinder Summe

$$= \frac{bd^2 \cdot P}{4} + \frac{b\delta^2 \cdot P}{4}$$

$$= \frac{b \cdot P}{4} dd + \frac{b \cdot P}{4} \delta\delta$$

$$= \frac{b \cdot P}{4} (dd + \delta\delta)$$

Nun ist aber $dd + \delta\delta$ das Quadrat des Durchmessers eines Kreises, der so groß als die Summe

me zweener Kreise ist, deren Durchmesser d und δ (44. S. 2. Z.): Folglich ist $\frac{P(dd + \delta\delta)}{4}$ die Summe gedachter beyden Kreisesflächen: Also, b $\frac{P(dd + \delta\delta)}{4} = \frac{bP}{4}(dd + \delta\delta)$ ein Cylinder dessen Höhe = b', und Grundfläche der Summe jener beyden Cylinder Grundflächen gleichet.

Hieraus hat man den Satz:

Die Summe zweener Cylinder von gleichen Höhen ist ein Cylinder, dessen Höhe eben dieselbe, seine Grundfläche aber die Summe jener Grundflächen ist.

60. Satz. 12. Zusatz.

Ueberhaupt heißt jeder Maasstab mit dem man Körper nach Wein- Bier- Frucht- Gewichtmaaß ꝛc. ausmesset ein **Visirstaab**.

Bey **Visirung der Fässer**, oder Findung wie viel Kannen ein Faß halte, braucht man gemeiniglich den so genannten **cylindrischen Visirstab**, dessen Verfertigung dieser Zusatz kürzlich lehrt, und die wir hier etwas ausführlicher zeigen wollen.

Ein Cylinder (wie der der 120. Figur, zu der auch das darunter stehende rechtwinklichte Δ AB4 gehört) von einer gewissen Höhe, KL, dem Durchmesser LM, halte ein gewisses Maaß, z. E. eine Kanne (welche etwa an dem Orte gebräuchlich ist, wo der Visirstab gebraucht werden soll.)

Nun nehme man auf beyden Schenkeln eines rechten Winkels, (wie A, in a. Fig.) den Durchmesser dieses cylindrischen Kannenmaasses; also in der Figur mache man AB = A1 = LM; ziehe hierauf die Hypothenuse B1; so ist diese

$$= \sqrt{(ABq + A1q)}$$
$$= \sqrt{(2\,ABq)}$$
$$= \sqrt{(2\,LMq)}$$

Also = dem Durchmesser eines Cylinders von eben der Höhe KL, und einer Grundfläche, die doppelt so groß ist als die des cylindrischen Kannenmaßes (11. Zus.), welches Inhalt

$$= KL \times LMq \times \tfrac{1}{4} P,$$

da hingegen vorigen Cylinders Inhalt

$$= KL \times 2\,LMq \times \tfrac{1}{4} P$$
$$= 2 . KL . LMq . \tfrac{1}{4} P$$

Also doppelt so groß als der des cylindrischen Kannenmaßes:

Folglich erhält man so den Durchmesser B1 eines cylindrischen Gefäßes, das unter eben der Höhe, zwo Kannen hält.

Man mache ferner A2 = B1, und ziehe die Hypothenuse B2, so ist diese der Durchmesser eines dreykannichen cylinderischen Gefäßes, welches die Höhe KL des einkannichen hat.

Denn

$$B2 = \sqrt{(A2q + ABq)}$$
$$= \sqrt{(B1q + ABq)}$$

$$= \sqrt{}$$

$$= \sqrt{(2\,ABq + ABq)}$$
$$= \sqrt{(2\cdot LMq + LMq)}$$

Also gleich dem Durchmesser eines Cylinders Grundfläche die 2mal so groß ist, als die des zwokannichten (11. Zus.) folglich dreymal so groß, als die des einkannichen.

Dieses Cylinders Inhalt ist

$$= KL \times 3\,LMq \times \tfrac{1}{4}\,P$$
$$= 3 \cdot KL \cdot LMq \cdot \tfrac{1}{4}\,P$$

da des einkannichen seiner

$$= KL \times LMq \times \tfrac{1}{4}\,P.$$

Eben so erhellet, daß wenn man

$$A3 = B2;$$
$$A4 = B3$$
u. s. w.

macht, man A4 u. s. f. als Durchmesser für cylindrische Gefäße bekommt, die unter eben der Höhe des Kannenmaßes, 3, 4, 5 u. s. w. Kannen halten.

Diese Durchmesser nun A1, A2, A3, A4 u. s. w. trage man auf die eine Seite eines prismatischen Stabes, der von hartem Holze, Elfenbein, Metall, seyn kann, und schreibe dazu die in der Figur stehenden Zahlen 1, 2, 3, 4 ꝛc. damit man sieht, welchen Durchmesser jede Linie bedeute.

Auf die andere Seite des Stabes setze man des Kannenmaaßes Höhe so vielmal hinter einander als es des Stabes Länge zuläßt.

So ist der ganze Visirstab fertig, dessen Gebrauch man schon aus seiner Construction begreift.

Eine Anmerkung für Anfänger der Bergbaukunst.

Die im Bericht vom Bergbau §. 462. angegebenen Durchmesser der 2, 3, 4 und mehr böhrigten Röhren, lassen sich gleichfalls nach dem 11. Zusatze finden.

Denn eine einböhrige Röhre ist die, deren innerer Durchmesser = 2 Zoll ist: Also ist der Durchmesser einer

zweyböhrigten $= \sqrt{(2^2 + 2^2)}$
$= \sqrt{8}$
$= \sqrt{2 \cdot 4}$
$= 2\sqrt{2}$;

dreyböhrigten $= \sqrt{([2\sqrt{2}]^2 + 2^2)}$
$= \sqrt{(8 + 4)}$
$= \sqrt{12}$
$= \sqrt{3 \cdot 4}$
$= 2\sqrt{3}$

vierböhrigten $= \sqrt{([2\sqrt{3}]^2 + 2^2)}$
$= \sqrt{(4 \cdot 3 + 4)}$
$= \sqrt{16}$
$= 4$
$= 2\sqrt{4}$;

fünfböhrigten $= \sqrt{(4^2 + 2^2)}$
$= \sqrt{20}$
$= \sqrt{4 \cdot 5}$
$= 2\sqrt{5}$;

sechsböhrigten $= \sqrt{([2\sqrt{5}]^2 + 2^2)}$
$= \sqrt{(4 \cdot 5 + 4)}$
$= \sqrt{24}$
$= \sqrt{4 \cdot 6}$
$= 2\sqrt{6}$;
siebenböhrigten $= \sqrt{([2\sqrt{6}]^2 + 2^2)}$
$= \sqrt{(4 \cdot 6 + 4)}$
$= \sqrt{28}$
$= 2\sqrt{7}$;
nböhrigten $= 2\sqrt{n}$, (wie man leicht aus den für 2, 3, 4 ꝛc. böhrichten Röhren Durchmesser gefundene Werthe schließt).

Daß diese Werthe alle in Zollen gefunden werden, braucht man kaum zu erinnern.

60. Satz. 13. Zusatz.

Mit dem Visirstab den Inhalt eines Cylinders, wie NOP (dieser steht auf der VII. Tafel neben der 125. fig. und unter dem Dreyecke 4AB) zu finden.

Man messe damit seiner Grundflächen Durchmesser OP; so erfährt man dadurch wie viel Kannen er enthält, wenn er nur die Höhe QO = KL, (der Höhe des einkannichten Maaßes) hätte.

Hierauf messe man die Höhe ON des vorgegebenen Cylinders mit der Seite des Visirstabes, worauf die Höhen des Kannenmaaßes sich befinden. Dadurch erfährt man wie vielmal die Anzahl Kannen, die auf der Grundfläche neben einander Raum haben, über einander stehen können.

Multiplicirt man also beyde gefundene Zahlen; so giebt das Product, das Verlangte.

Stäke der einkanniche Diameter in OP, funfzehnmal, und jenes Höhe, KL, in ON, 20mal; so enthält der Cylinder NOP,

$15 \times 20 = 300$ Kannen.

60. Satz. 13. Zusatz. Anm.

Die Fässer, zu deren Ausmessung (wie schon gedacht) eigentlich der Visirstab gebraucht wird, sind nicht vollkommene cylindrische Gefäße.

Einige sehen ihre Gestalt, als zween abgestumpfte an ihren Grundflächen verbundene Kegel an, welche Meynung wohl die irrigste ist; andere, als einen Cylinder, dessen Höhe des Fasses Länge, und seiner Grundfläche Durchmesser, das arithmetische Mittel zwischen dem Durchmesser des Fasses Boden und dem seiner Spundtiefe.

Heißt also eines Fasses innere Länge = h,
Halbmesser der Boden = b
" " der Spundtiefe = a;

so wäre sein Inhalt

$$h \cdot (b + a)^2 P \quad (4.\ 3.)$$

(wo P, wie bekannt = 3, 141 . . . .)

Mit eben dem Rechte kann man auch ein Faß, ACabDB, 121. fig. (wie im Buche angemerkt ist) als einen Cylinder betrachten, der das arithmetische Mittel zwischen zween Cylindern ist, deren

Höhe

Höhe des Fasses Länge Aa, = h, und woven der eine die Boden des Fasses zu Grundflächen also $\frac{1}{2}$ AB = $\frac{1}{2}$ ab, = b zu Halbmessern hat, und des andern Grundfläche Halbmesser die halbe Spundtiefe CD, = EF = ef = a, ist.

So betrachtet, erhält man des Fasses Inhalt
$= \frac{1}{2} h P (a^2 + b^2)$

Will man diesen mittelst des cylindrischen Visirstabes finden, so verfährt man auf folgende Art:

Mit der Seite wo die Höhen des einkannigen Maaßes verzeichnet sind, messe man die innere Länge des Fasses oder h; Dann mit der, worauf die 1, 2, 3 ꝛc. kannigen Durchmesser getragen worden, den Durchmesser am Boden, oder b und auch die Spundtiefe oder a, so wird das Product b . h, die Anzahl der Kannen anzeigen, die der Cylinder der Boden hält, und das a . h den Inhalt des Cylinders der Spundtiefe nach diesem Maaße. (13. Z.) Also wird

$$\frac{hb + ha}{2} = \frac{1}{2} h (a + b)$$

des Fasses Inhalt nach Kannen seyn.

Z. E. sey h = 10; b = dem fünfkannichten Durchmesser, also = 5 und a = 8, oder dem 8 kannichten Durchmesser: so wird das Faß

$\frac{1}{2}$ 10 . (8 + 5) Kannen
= 5 . 13 Kannen

enthalten.

Keine von diesen Methoden, (die nur für volle Fässer gelten,) kommen der Wahrheit so nahe, als die so Herr **Lambert** in seinen Beyträgen zum Gebrauche der Mathematik, I. Th. S. 314 u. f. gegeben hat. Ich will seine Regel hier vortragen; der Beweis davon läßt sich aus den bisherigen Gründen alleine nicht führen.

Die Regel heißt:

Man addire zu zwey Drittel des größern Cylinders, (d. i. der Spundtiefe) ein Drittel des kleinern Cylinders (oder des der Boden).

Nach dieser Regel fehlt man 20 bis 30mal weniger, als nach der nächst vorhergehenden. (a. a. O. §. 27.)

Herr Lambert giebt auch daselbst §. 36. eine Regel für Fässer die nicht voll sind aber nach der Länge liegen.

Sie ist:

Man setze, das Faß habe in der Mitte bey dem Spundloche einen Boden parallel mit den beyden andern. Nun messe man den Raum aus, den der Wein auf diesen drey Boden benezt oder bedeckt. Den Raum des mittleren Bodens nehme man vierfach, und addire dazu den Raum der äußern Böden. Diese Summe durch 6 getheilt, und was heraus kommt mit des Fasses Länge multiplicirt, giebt den Inhalt des Fasses, so weit es angefüllt ist.

Wie man den Visirstab nach diesen Regeln gebrauchen soll, zeigt auch Herr Lambert a. a. O. §. 39 u. f. überdieß noch wie genau die nach gedachten Regeln gefundene Resultate mit den Versuchen übereinstimmen.

Auser den angeführten Buche des Herrn Lamberts hat man auch über die **Visirkunst** oder **Pithometrie Johann Matthias Hasens** Theor. et prax. nov. pithometriae, 4to. Witt. 1728.

61. Satz.

Bedingung.

Die Pyramide ABGDA (122. fig.) werde, etwa bey P, von einer Ebne mit der Grundfläche BGDB parallel, geschnitten;

Behauptung.

Der Schnitt PKTP ist der Grundfläche BGDB, **ähnlich.**

Beweis.

Es ist . . . . . = BG : GD]

Da PK mit BG parallel ist, und KT mit GD; so ist in den Dreyecken KPA, GBA, der

W. KPA = GBA
PKA = BGA } (12. S. 2. B.)
PAK = BAG (beyden gemein)

Also sind diese Dreyecke so, wie sie der 26. Satz verlangt; Folglich

PK ; BG = AK : AG,

Eben

Eben so sind in den Dreyecken AKT, AGD die Winkel nach der Ordnung gleich; und daher

$$AK : AG = KT : GD \text{ (26. S.)}$$

Aber

$$PK : BG = AK : AG$$

(wie gleich da gewesen)

Also

$$PK : BG = KT : GD$$

Mithin

$$PK : KT = BG : GD$$

Auf gleiche Art erhellet, daß

$$PTK = GDB$$

und

$$PT : TK = BD : DG$$

Also folgen ꝛc. (S. Buch.)

61. Satz. 1. Zusatz.

... und also parallel (II. Th. 2. Erkl. Zus.)]

Folglich haben die Dreyecke AZP, ACB nach der Ordnung gleiche Winkel, und sind also ähnlich (27. S. Zus.): Folglich

$$AZ : AC = PZ : BC = AP : AB$$

aber

$$AP : AB = AK : AG \text{ (wie aus dem Be-}$$
$$= PK : BG \text{ weise vor. S. erh.)}$$

Folglich

$$AZ : AC \text{ ꝛc. (S. Buch.)}$$

61. Satz. 2. Zusatz.

$$\ldots = f^2 : x^2]$$

weil

weil nach dem 1. Zusatze

$$PK : BG = AZ : AC$$

also

$$BG : PK = AC : AZ \text{ (Ar. V. 19.)}$$

folglich

$$BGq : PKq = ACq : AZq \text{ (Ar. V. 50.)}$$

d. i.

$$BGq : PKq = f^2 : x^2$$

oder

$$S : B = f^2 : x^2;$$

also

$$S = \frac{B\,x^2}{f^2}$$

Des Schnitts Fläche findet man also, wenn man der Pyramide Grundfläche in das Quadrat des Abstands des Schnitts von der Spitze multiplicirt, und dieses Product durch das Quadrat der Höhe der Pyramide dividirt.

61. Satz. 3. Zusatz.

Diese Formel läßt sich unmittelbar aus vor. Zusatz u. d. Erl. schlieſſen; Indessen kann man sich die Sache auch folgendermaßen darthun:

Des anderen Durchschnitts pkt = f Entfernung von der Spitze A der Pyramide sey Az; diese Linie aber = AZ + Zz; überdieß ist AZ = x (vor. Zus.); und Zz heisse e: Also

$$Az = x + e.$$

Weil

Weil der Durchschnitt pkt = f und die Grundfläche BGD = B, ähnliche Figuren sind, so ist

$$B : f = BGq : pk_q$$

Nun ist aus gleicher Ursache wie im ersten Zusatze

$$BG : pk = AC : Az$$

Also

$$BGq : pk_q = ACq : Az_q$$
$$= f^2 : (x + e)^2$$

folglich

$$B : f = f^2 : (x + e)^2$$
$$B([x + e]^2) = f . f^2$$

Mithin

$$f = B \frac{(x + e)^2}{ff}$$

61. Satz. 5. Zusatz.

Das . . . . . weil ꝛc.]

Jedes Pyramidenstück, (wie KPTkpt, LXXIX. fig.) zwischen zween parallelen Ebnen, (KPT, kpt) ist größer als ein Prisma (PktKvTP) dessen Grundfläche die obere kleinere Ebne (PKT), und kleiner als ein Prisma, (RkpKtVR) dessen Grundfläche die untere größere Ebne, (pkt) wenn beyder Prismen Höhe das Loth (Zz = e) zwischen den zwoen parallelen Ebnen, ist.

Denn im ersten Falle muß man von dem Pyramidenstück etwas wegnehmen, im zweyten aber etwas dazu setzen, wie man leicht sieht.

Hier-

Hieraus folgt: daß die Größe nur gedachten Pyramidenstücks, von der Größe jedes dieser Prismatum weniger unterschieden ist, als diese Prismata selbst von einander unterschieden sind.

Nun ist des Prismatis über der kleinern Ebne PKT Inhalt

$$= e \times PKT,$$

oder, [weil PKT = S gesezt (2. Z.)]

$$= e \,.\, S$$

und des Prismatis über der größern Ebne pkt, seiner

$$= e \times pkt$$

oder, (weil pkt = f gesezt [2. Z.])

$$= e \,.\, f$$

Also beyder Prismatum Unterschied

$$= e \,.\, f - e \,.\, S = e\,(f - S)$$

welcher sich zum kleinsten Prismate eS verhält, wie die Differenz der größern und kleinern Grundfläche zur leztern; oder

$$e\,(f - S) : e \,.\, S = f - S : S$$

Weil aber

$$f = \frac{B\,(x + e)^2}{f^2}$$

$$S = \frac{B\,x^2}{f^2}$$

So ist

$$f - S = \frac{B\,(x + e)^2}{f^2} - \frac{B\,x^2}{f^2}$$

=

$$= \frac{B\,(e+x)^2 - Bx^2}{f^2}$$

$$= \frac{B\,[(x+e)^2 - x^2]}{f^2}$$

Also die Verhältniß $e\,(f - S) : eS$,

$$= \frac{B\,[(x+e)^2 - x^2]}{f^2} : \frac{B\,x^2}{f^2}$$

$$= \frac{(x+e)^2 - x^2}{f^2} : \frac{x^2}{f^2}$$

$$= (x+e)^2 - x^2 : x^2$$

Folglich, [da

$$(x+e)^2 - x^2 = x^2 + 2xe + e^2 - x^2$$

(Arithm. IIII. 1.)

$$= 2xe + e^2$$

$$= 2xe + ee$$

$$= (2x+e)\,e]$$

$e\,(f - S) : eS$, oder $f - S : S$,

$$= (2x+e)\,e : x;$$

Weil nun ꝛc. (S. Buch.)

Aber die Art ..... nicht erklären]

Diese Summe läßt sich mittelst der Rechnung des Unendlichen (Vor. 9.) aber auch ohne diese, finden. Wie dieß auf leztere Art geschiehet, zeigt der Herr von Schönberg im 179. §. seiner vortreflichen Abhandlung von den Tangenten, Quadraturen, und Rectificationen der Kegelschnitte. (Leipzig 1773, 8v.)

Ich

Ich will das Verfahren mit einigen Veränderungen hersetzen:

Man stelle sich also die Höhe AC oder f einer Pyramide (122. fig.) deren Basis B, in unzählig viele unendlich kleine Theile getheilt und durch die Theilpuncte parallele Ebne mit B, gelegt, vor, welche nach der Ordnung T, S, f, R, Q.... heissen mögen; überdieß setze man ein solches unendlich gleiches Theilchen = e; so ist

T um e,
S um 2e,
f um 3e,
R um 4e
u. s. w.

von der Spitze der Pyramide entfernet, und

$$T = \frac{B}{f^2} \cdot 1 \cdot e^2$$
$$S = \frac{B}{f^2} \cdot 2^2 e^2$$
$$f = \frac{B}{f^2} \cdot 3^2 \cdot e^2$$
$$R = \frac{B}{f^2} \cdot 4^2 \cdot e^2$$
u. s. w.

(61. S. 2. 3.)

Nun giebt es so viele Grundflächen so oft e in f enthalten ist, d. i. $\frac{f}{e}$; also auch so viele über einander stehende Prismen, wovon jedes ein Product

aus seiner Grundfläche in die unendlich kleine Höhe e, ist, und für ein Pyramidenstück angenommen werden kann, das sich in der Höhe e, zwischen den Ebnen seiner unendlich nahe liegenden Grundflächen befindet.

Folglich ist die Pyramide ABGD

$$= e \cdot T + e \cdot S + e \cdot \int + e \cdot R \ldots + e \cdot B$$

Aber des Prismatis B obere Grundfläche ist von der Pyramidenspitze um $\frac{f}{e} \times e$ entfernet; also ist sie

$$= \frac{B}{f^2} \cdot \frac{f^2}{e^2} \cdot e^2 \text{ (2. 3.)}$$

Folglich das Prisma selbst

$$= e \cdot \frac{B}{f^2} \cdot \frac{f^2}{e^2} \cdot e^2$$

Also

$$ABGD = e \cdot \frac{B}{f^2} \cdot 1 \cdot e^2 + e \cdot \frac{B}{f^2} \cdot 2^2 \cdot e^2 +$$

$$e \cdot \frac{B}{f^2} \cdot 3^2 \cdot e^2 \ldots\ldots e^2 \cdot \frac{B}{f^2} \cdot \frac{f^2}{e^2} \cdot e^2$$

$$= \frac{e^3 B}{f^2} \cdot 1 + \frac{e^3 B}{f^2} \cdot 2^2 + \frac{e^3 B}{f^2} \cdot 3^2 \ldots$$

$$\ldots + \frac{e^3 B}{f^2} \cdot \frac{f^2}{e^2}$$

$$= \frac{e^3 B}{f^2} \left(1 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + \frac{f^2}{e^2}\right)$$

Nun

Nun ist nach des 66. §. angef. Buches, die Summe dieser Reihe, (oder der Menge nach einem allen gemeinschaftlichen Gesetze fortgehenden Zahlen oder Größen) $1, + 2^2, + 3^2 \ldots\ldots + \frac{f^2}{e^2}$,

$$= \frac{f^3}{3 \cdot e^3}$$

Also

$$\frac{e^3 B}{f^2} \left(1 + 2^2 + 3^2 \ldots\ldots + \frac{f^2}{e^2} \right)$$

$$= \frac{e^3 B}{f^2} \cdot \frac{f^3}{3 \cdot e^3}$$

$$= \frac{e^3 \cdot B \cdot f^3}{f^2 \cdot 3 \cdot e^3}$$

$$= \frac{B \cdot f}{3}$$

Mithin:

$$ABGD = \tfrac{1}{3} Bf$$

Folglich ist der Inhalt jeder Pyramide, ein Drittel des Products aus der Höhe in die Grundfläche; wie im 63. S. 1. und 2. Z. auf eine andere Art gezeigt wird.

62. Satz.

Bedingung.

ABGDA, und αβγδα (122. fig.) seyen zwo Pyramiden, die gleich hoch sind, und gleiche und ähnliche Grund-

flächen, BGD, βγδ, haben; So wird

---

behauptet,

Diese Pyramiden seyen gleichgroß.

Eben dieß gilt auch von gleich hohen und über einer Grundfläche stehenden Kegeln.

Beweis

. . . . deren . . . . . e seyn wird]

Hier wird e ebenfalls unendlich klein, und also die Ebnen durch PKT, pkt unendlich nahe angenommen.

. . . . d. i. gleichen Inhalts]

Und da der Kegel eine Pyramide von unzählig vielen unendlich kleinen Seiten ist (61. S. 4. Z.); so erhellet der Satz auch für Kegel, die die geforderten Bedingungen haben.

63. Satz.

Bedingung.

Es sey EFDBCA (LXXX. fig.) ein dreyseitiges Prisma

Behauptung.

Diese läßt sich in drey Pyramiden [DACB, (LXXXI. Figur;) DACE, (LXXXII. Fig.) EFDC (LXXXIII. Fig.)] theilen, die alle gleichen Inhalts sind.

Vor-

Vorbereitung.

Man schneide das Prisma (LXXX. Fig.) durch D und A, C, ferner durch D, E und C;

Beweis.

So entstehen drey Pyramiden;

Die erste davon ist
ABCD,
welche deutlicher die LXXXI. Fig. darstellt, (wo, wie in den zwo nächst folgenden Figuren, einerley Buchstaben mit der LXXX. Figur, einerley bedeutet);

Die zweyte, ist
CDEA,
welche deutlicher die LXXXI. Figur zeigt, zumal wenn man sie von der Seite CE ansieht;

und die dritte ist
ECDF,
wie die LXXXII. Figur deutlich vor Augen legt.*)

Die erste und zweyte haben gleiche und ähnliche Grundflächen BAD, DAE (LXXX. Fig.): denn das Dreyeck DAE, sowohl als das ABD ist, die Hälfte des Parallelogramms EDBA, der einen Seitenfläche des Prismatis; (Vorb. und 12. S. 6. Z.) überdieß sind beyder Spitzen beysammen in

*) Am allerdeutlichsten fällt diese Eintheilung und die ganze Sache in die Augen, wenn man auf angezeigte Art ein aus Holz gefertigtes dreyseitiges Prisma zerschneiden läßt.

C; Folglich haben sie auch gleiche Höhen: Also gleichen Inhalt. (62. S.)

Der zweyten und dritten Pyramide Grundflächen ACE, FEC, sind ebenfalls gleich und ähnlich, weil aus der nämlichen Ursache, die Dreyecke ACE, FEC, des Parallelogramms EACF, Hälften sind. Dieser ihre Spitzen aber sind beysammen in D; daher haben sie auch gleiche Höhen; Folglich ebenfalls gleichen Inhalt. (62. S.)

Also hat die erste und dritte Pyramide mit der zweyten gleichen Inhalts: Folglich sind alle drey gleich. (Ar. I. 87.)

63. Satz. 1. Zusatz.

Da das Tetraedrum eine dreyseitige Pyramide ist (II. Th. 8. Erkl. 1. Anm.); so kann man also dessen Inhalt mittelst dieses Zusatzes finden.

Nach dem folgenden Zusatze aber kann man den körperlichen Inhalt des **Octaedrums**, **Icosaedrums**, **Dodecaedrums**, berechnen: denn der erste Körper ist eine doppelt vierseitige Pyramide, der zweyte, besteht aus zwanzig dreyseitigen, der dritte hingegen aus zwölf fünfseitigen Pyramiden, die alle ihre Spitzen in dem Mittelpuncte jeder dieser beyden Körper haben.

63. Satz. 2. Zusatz.

Folgerungen hieraus.

Ist die Grundfläche der einen von zwoen Pyramiden

ramiden = β und Höhe = Φ; der andern aber B und f; so verhalten sich beyde Pyramiden wie

$$\frac{1}{3}\beta\Phi : \frac{1}{3}Bf = \beta\Phi : B \cdot f$$

Man sieht also, daß auch bey den Pyramiden die Sätze des 58. S. 1, 2. und 3. Zus. und des 60. S. 3. Zusatzes statt finden.

63. Satz. 3. Zusatz

Ein Kegel ist eine Pyramide von unzählig vielen unendlich schmalen Seiten; daher wird sein Inhalt gleichfalls gefunden, wenn man das Drittel seiner Höhe in seine Grundfläche multiplicirt. Diese ist aber ein Kreis; Heißt nun dessen Durchmesser d; so ist der Kreisfläche Inhalt = $\frac{d^2 P}{4}$ (44. S.) Folglich, wenn des Kegels Höhe = f ist, sein Inhalt

$$= \frac{1}{3} f \cdot \frac{d^2 P}{4}$$

oder, (wenn $\frac{1}{2} d = r$ angenommen)

$$= \frac{1}{3} f \cdot r^2 P$$

Für zween Kegel, (davon des einen Höhe f, seiner Grundfläche Durchmesser d, des andern Höhe aber Φ, und seiner Grundfläche Durchmesser = δ,) ist beyder Verhältniß

$$= \frac{1}{3} f \cdot \frac{d^2 P}{4} : \frac{1}{3} \Phi \frac{\delta^2 P}{4}$$

$$= \frac{fd^2 \cdot P}{3 \cdot 4} : \frac{\Phi\delta^2 \cdot P}{3 \cdot 4}$$

$$= fdd$$

$= fdd : \Phi dd$

Also finden bey den Kegeln auch die Sätze des 60. S. 8, 9, 10. und 11. Zus. ihre Anwendung.

63. Satz. 4. Zusatz.

Wenn man eine Pyramide BDGA (122. fig.) mit der Grundfläche parallel schneidet; so wird sie dadurch in zween Theile getheilt; der eine ist eine, gleichsam von der ganzen abgeschnittene Pyramide PKTA, deren Spitze also der Pyramide BDGA Spitze, und ihre Grundfläche der Schnitt PKT, der der Grundfläche BGD der Pyramide BDGA, ähnlich ist: (60. S.) der andere Theil PTDBGK aber das was man eine abgekürzte Pyramide nennt; Sie hat eine größere und kleinere Grundfläche, davon jene, der Pyramide Grundfläche BGD, diese hingegen der Schnitt PKT ist.

Hieraus sieht man, daß der Inhalt einer abgekürzten Pyramide erhalten werden kann, wenn man von dem Inhalte der ganzen PBDIKG, den Inhalt der abgeschnittenen Pyramide PTKA abziehet.

Heißt nun der Pyramide PTKA Höhe $AZ = x$, Grundfläche S (wie 61. S. 2. Z.), ferner der ganzen Pyramide BDGK Höhe f, und Grundfläche B (wie im 2. Zus. d. S.); so ist

$$\left.\begin{array}{l} PTKA = \frac{1}{3}\,xS \\ BDGA = \frac{1}{3}\,fB \end{array}\right\} \text{(2. Z. d. Z.)}$$

Also die abgekürzte Pyramide

$$PTDBGK = \frac{1}{3}\,fB - \frac{1}{3}\,xS$$

oder,

oder, (weil $S = \frac{Bx^2}{f^2}$ [61. S. 2. Z.])

$$PTDBGK = \tfrac{1}{3} fB - \tfrac{1}{3} x \frac{Bx^2}{f^2}$$

$$= \tfrac{1}{3} B . f - \tfrac{1}{3} B . \frac{x^2}{f^2} . x$$

$$= \text{ꝛc. (S. Buch.)}$$

$$\ldots \text{oder } x = \frac{f \sqrt{S}}{\sqrt{B}} = f - y]$$

Weil x oder $AZ = AC - ZC$, d. i. $f - y$.

folglich . . . . . man könnte ꝛc.]

Wenn man in die Gleichung

$$\frac{f \sqrt{S}}{\sqrt{B}} = f - y$$

mit $\sqrt{B}$ multiplicirt; so erhält man

$$\frac{f . \sqrt{S}}{\sqrt{B}} \times \sqrt{B} = (f - y) . \sqrt{B}$$

d. i.

$$f . \sqrt{S} = f \sqrt{B} - y \sqrt{B}$$

Also:

$$y \sqrt{B} = y \sqrt{B} \text{ add.}$$

---

giebt

$$f \sqrt{S} + y \sqrt{B} = f \sqrt{B}$$

und

$$f \sqrt{S} = f \sqrt{S} \text{ abgez.}$$

$$y \sqrt{B} = f \sqrt{B} - f \sqrt{S}$$

$$= f(\sqrt{B} - \sqrt{S})$$

Folglich

$$\frac{y\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{S}} = \frac{f(\sqrt{B} - \sqrt{S})}{\sqrt{B} - \sqrt{S}}$$

$$= f$$

Nun ist

$$x = f \cdot \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{B}} \text{ (wie a. B. bekannt)}$$

Sezt man also in diese Gleichung den für f gefundenen Werth; so erhält man

$$x = \frac{y\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{S}} \times \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{B}}$$

$$= \frac{y\sqrt{B} \cdot \sqrt{S}}{(\sqrt{B} - \sqrt{S})\sqrt{B}} \text{ (Ar. I. 76.)}$$

$$= \frac{\sqrt{B} - \sqrt{S}}{y\sqrt{S}}$$

Der Ausdruck für die abgekürzte Pyramide war

$$\tfrac{1}{3} B \left(f - \frac{x^2}{f^2} x\right);$$

Aber für f und x hat man nun durch B, S, y ausgedruckte Werthe (oder solche, worinnen nur gedachte Buchstaben vorkommen) gefunden; Erinnert man sich daß $\frac{x^2}{f^2} = \frac{S}{B}$, und sezt dieß und die für x und f vorhin erhaltenen Werthe, statt dieser Größen in $f - \frac{x^2}{f^2} x$; so wird dieser Ausdruck

=

$$= \frac{y\sqrt{B}}{\sqrt{B}-\sqrt{S}} - \frac{S}{B} \cdot \frac{y\sqrt{S}}{\sqrt{B}-\sqrt{S}}$$

$$= \frac{y\sqrt{B}}{\sqrt{B}-\sqrt{S}} - \frac{S \cdot y\sqrt{S}}{B(\sqrt{B}-\sqrt{S})}$$

Das ist, (wenn man diese beyden Brüche auf einerley Benennung bringt, indem man in den Zähler und Nenner des Bruchs linker Hand mit B multiplicirt)

$$= \frac{y\sqrt{B.B}}{(\sqrt{B}-\sqrt{S})S} - \frac{Sy\sqrt{S}}{(\sqrt{B}-\sqrt{S})S}$$

$$= \frac{yB\sqrt{B} - yS\sqrt{S}}{B.(\sqrt{B}-\sqrt{S})}$$

$$= \frac{y(B\sqrt{B} - S\sqrt{S})}{B(\sqrt{B}-\sqrt{S})}$$

Folglich ist der abgekürzten Pyramide Inhalt, oder

$$\tfrac{1}{3}B(f - \frac{x^2}{f^2}.x) = \tfrac{1}{3}B\,\frac{y(B\sqrt{B} - S\sqrt{S})}{B(\sqrt{B}-\sqrt{S})}$$

$$= \tfrac{1}{3}\,\frac{y(B\sqrt{B} - S\sqrt{S})}{\sqrt{B}-\sqrt{S}}$$

$$= \tfrac{1}{3}y\,\frac{B\sqrt{B} - S\sqrt{S}}{\sqrt{B}-\sqrt{S}}$$

Man könnte ꝛc. (S. Buch.)

63. Satz. 5. Zusatz.

Die für den Inhalt einer abgekürzten Pyramide gefundene Formel $\frac{1}{3}y(B + S + \sqrt{B.S})$ ist auch, (weil der Kegel eine Pyramide von unzählig vielen

vielen Seiten,) bey dem abgekürzten Kegel, von der Höhe y dessen kleinere Grundfläche S und grössere B ist, brauchbar.

Man kann aber für ihn die Formel etwas bequemer einrichten.

Der Durchmesser der kleinern Grundfläche S, sey = r, der größern B, = R; so ist

$$\left.\begin{aligned} S &= r^2\ P \\ B &= R^2\ P \end{aligned}\right\} \text{ (44. S.)}$$

also:

$$\begin{aligned} S \,.\, B &= r^2\ P \,.\, R^2\ P \\ &= r^2 \,.\, R^2 \,.\, P^2 \end{aligned}$$

folglich:

$$\begin{aligned} \sqrt{S \,.\, B} &= \sqrt{r^2 \,.\, R^2 \,.\, P^2} \\ &= r \,.\, R \,.\, P \end{aligned}$$

Mithin ist

$$\begin{aligned} B + S + \sqrt{S \,.\, B} &= R^2\ P + r^2\ P + Rr P \\ &= P\ (R^2 + r^2 + Rr) \end{aligned}$$

Also

$$\tfrac{1}{3} y\,(B + S + \sqrt{B \,.\, S}) = \tfrac{1}{3} y \,.\, P\,(R^2 + r^2 + Rr)$$

dem Inhalt des abgekürzten Kegels.

63. Satz. 5. Zusatz. Anm.

Der falsche Inhalt ist also

$$\frac{B + S}{2} \,.\, y$$

$$= \frac{(B + S)\ y}{2}$$

=

$$= \frac{yB + yS}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2} yB + \tfrac{1}{2} yS$$

und der wahre

$$= \tfrac{1}{3} y (B + S + \sqrt{B.S})$$
$$= \tfrac{1}{3} yB + \tfrac{1}{3} yS + \tfrac{1}{3} y\sqrt{BS}$$
$$= \tfrac{1}{3} By + \tfrac{1}{3} Sy + \tfrac{1}{3} y\sqrt{BS}$$

Wenn man nun den wahren von dem falschen abzieht; so giebt der Ueberschuß, um wie viel der falsche dem wahren übertrift. Dieser Abzug ist im Buche nach Ar. II. 3. geschehen, und der Ueberschuß des falschen über den wahren

$$= \tfrac{1}{6} By + \tfrac{1}{6} Sy - \tfrac{1}{3} y\sqrt{BS}$$
$$= \frac{1}{3 \cdot 2} By + \frac{1}{3 \cdot 2} Sy - \tfrac{1}{3} y\sqrt{BS}$$
$$= \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2} By + \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2} Sy - \tfrac{1}{3} y\sqrt{BS}$$
$$= \tfrac{1}{3} \cdot \frac{By}{2} + \tfrac{1}{3} \cdot \frac{Sy}{2} - \tfrac{1}{3} y\sqrt{BS}$$

$$= \tfrac{1}{3} y \left(\frac{B}{2} + \frac{S}{2} - \sqrt{B.S}\right)$$

$$= \tfrac{1}{3} y \left(\frac{B+S}{2} - \sqrt{BS}\right)$$

$$= \tfrac{1}{3} y \left(\frac{B+S-2\sqrt{BS}}{2}\right)$$

wo $B + S - 2\sqrt{BS} = (\sqrt{B} - \sqrt{S})^2$, gefunden worden.

Daß ꝛc. (S. Buch.)

64. Satz. 1. Zusatz.

Denn in diesem Falle ist die Summe aller Dreyecke die der Pyramide Seitenflächen ausmachen

$$= \frac{1}{2} k . BC + \frac{1}{2} k . CD + \frac{1}{2} k . DE + \ldots$$
$$= \frac{1}{2} k \, (BC + CD + DE \ldots\ldots)$$
$$= \frac{1}{2} k . p.$$

64. Satz. 3. Zusatz.

In diesem ..... berühret]

Da die Dreyecke PAR, QAR u. s. w. gleich sind, so sind es auch die Seiten RP, RQ ꝛc. Berührt also ein Kreis alle Seiten BC, CD ꝛc. der Grundfläche in P, Q ꝛc. (welches geschiehet, wenn die Grundfläche ein reguläres Vieleck ist); so sind RP, RQ ꝛc. Halbmesser und folglich R der Mittelpunct (I. Th. 12. Erkl.)

..... und die ..... berechnet]

Der Umkreis der Grundfläche eines senkrechten Kegels $=$ dP (44. S.) [wo d der Durchmesser]; Also dessen krumme Seitenfläche

$$= \frac{1}{2} kdP \text{ (vor. Zus.)}$$
$$= \frac{kdP}{2}$$
$$= k r P \text{ (44. S.)}$$

wo r der Grundfläche Halbmesser, und k des Kegels Seite, also $= \sqrt{(f^2 + \frac{1}{4} d^2)}$ wenn f des Kegels Höhe, oder, weil er senkrecht, seine Axe ist (61. S. 4. Z.)

Hieraus hat man den Satz:

Die krumme Seitenfläche eines senkrechten Kegels ist dem Producte aus der halben

ben Peripherie seiner Grundfläche in dessen Seite gleich.

Die krumme Seitenfläche und die Grundfläche eines senkrechten Kegels betragen zusammen

$$= krP + r^2 P$$
$$= rP\,(k + r)$$

64. Satz. 4. Zusatz.

... die ..... 1 : π]

Wo also π das P im 44. Satze, oder die Ludolphische Zahl 3, 141592 ..... (43. Satz. Anm.) ist.

ferner ist ..... = 2 π e R]

Es sey PO ein Loth von P, dem Punct wo der Querschnitt des Kegels ABD Seite AB trift, auf seine Grundfläche BbD; so ist der Winkel

$$BOP = 90°$$

Desgleichen auch

$$AZP = 90°$$
$$= ACB$$

weil AC des senkrechten Kegels ABD Axe seyn soll, und folglich auf dem Schnitt und der Grundfläche in den Mittelpuncten senkrecht steht; Also ist PO mit AC gleichlaufend, (46. S.) und daher der Winkel

$$BPO = PAC\ (12.\ S.\ 2.\ Z.)$$

folglich auch

$$PBO = APZ\ (13.\ S.)$$

Mithin die Dreyecke PBO, APZ, ABC ähnlich (27. S. Zus.); folglich

1) BO :

1) $BO : BP = PZ : P$;

Aber

$$BO = BC - OC$$
$$= BC - PZ \text{ (12. S. 3. Z.)}$$
$$= R - r$$
$$BP = e$$
$$BZ = r$$
$$AP = x$$

Folglich verwandelt sich obige Proportion in

$$R - r : e = r : x$$

Also hat man

$$x = \frac{e \cdot r}{R - r};$$

2) $BO : PB = BC : BA$;

Nun ist

$$BO = R - r$$
$$BP = e$$
$$BC = R$$
$$AB = BP + AB$$
$$= x + e$$

Also wird aus dieser lezten Proportion, die

$$R - r : e = R : x + e$$

Mithin

$$x + e = \frac{e \cdot R}{R - r}$$

Aber des Kegels ABT krumme Fläche war

$$r \pi x$$

und des Kegels ABD seine

$$R\pi (x + e);$$

Sezt man in jener den für x und in dieser den für x + e gefundenen Werth; so erhält man des Kegels ABT Fläche

$$\equiv r\pi\frac{re}{R-r}$$

$$\equiv\frac{\pi\cdot r^2\cdot e}{R-r}$$

des Kegels ABD seine

$$\equiv R\pi\frac{eR}{R-r}$$

$$\equiv\frac{\pi R^2 e}{R-r}$$

und folglich beyder Kegel Unterschied, oder des abgekürzten Kegels PBbDTP Fläche

$$\equiv\frac{\pi R^2 e}{R-r}-\frac{\pi r^2 e}{R-r}$$

$$\equiv\frac{\pi R^2 e-\pi r^2 e}{R-r}$$

$$\equiv\frac{\pi e(R^2-r^2)}{R-r}$$

$$\equiv\frac{\pi e(R+r)(R-r)}{R-r}$$ (Arith. II, 5. III. Ex.)

$$\equiv\pi e(R+r)$$

Ist e, oder PB, unendlich klein, d. i. liegt P unendlich nahe an B, und also der Querschnitt durch P

unendlich nahe an des Kegels ABD Grundfläche; so kömmt auch O unendlich nahe an B zu liegen, und der beyden Halbmesser BC, PZ oder R, r, Unterschied ist also unendlich klein; welches leztere auch daraus erhellet, weil $R - r = \frac{er}{x} = \frac{r}{x} . e$ (wie aus der Proportion (1) fließt) und also $\frac{r}{x}$ mit einer unendlich kleinen Größe e, d. h. mit einer die kleiner als jede angebliche Größe, (22. S. 12. Z.) also mit einer verschwindenden Größe (23. S. 1. Z.) multiplicirt, ist. Man kann also in diesem Falle $R = r$ setzen; und das unendlich schmale Stück der Kegelfläche wird

$$= \pi e (R + R)$$
$$= \pi e . 2R$$
$$= 2 \pi e R .$$
$$= 2 \pi R . e$$

also = der Fläche eines senkrechten Cylinders, dessen Höhe, das unendlich kleine e, und seiner Grundfläche Umkreis $= 2 \pi R$. (60. S. 6. Z.)

65. Satz. 358. Seite.

... dieses ..... gegeben ist]

Der Ausdruck

$$2 \pi r DQ = 2 \pi r (r - \sqrt{[r^2 - y^2]})$$

giebt den Inhalt der Krummenfläche jedes Kugelabschnitts, wo auch E auf der Kugeloberfläche gegeben ist.

Also

Also kann man auch durch gedachten Ausdruck die Kugelfläche finden, und folglich ist dadurch der Aufgabe ein Gnüge gethan.

Einen bequemern Ausdruck für die Fläche der halben, und ganzen Kugel, giebt hieraus der folgende

1. Zusatz.

Nach welchen man zu Findung der Fläche der halben und ganzen Kugel folgende Regel hat:

Man nehme von der Ludolphischen Zahl (43. S. Anm.) so viel Ziffern als es die vorgesezte Schärfe befiehlt, und multiplicire sie, für die halbe Kugelfläche, in das doppelte Quadrat, für die ganze Kugelfläche hingegen, in das vierfache Quadrat der Kugel Halbmesser.

Hier will ich noch anmerken, daß man den Durchmesser einer Kugel entweder aus ihres größten Kreises Peripherie, oder mittelst eines so genannten Tasterzirkels bestimmen kann; Uebrigens läßt er sich auch so finden:

Die Kugel seze man auf ein ebenes Bret, und lege an ihren beyden äußersten Seiten zweene Winkelhaken, wie die LXXXV. Figur zeigt, da dann AB der Kugeldurchmesser seyn wird.

65. Satz. 3. Zusatz.

. . . also . . . . . gleich]

Weil $2 r \pi \cdot 2 r = 4 \pi r^2$

65. Satz. 4. Zusatz.

Der Inhalt der Fläche einer Kugel deren Halbmesser = r, ist = $4\pi r^2$, und der Inhalt einer andern Kugel vom Halbmesser R, ist = $4\pi . R^2$: Also beyder Kugelflächen Verhältniß,

$$= 4\pi . r^2 : 4\pi . R^2$$
$$= r^2 : R^2 \text{ (Ar. V. 21)}$$

Wie man auch mittelst des 44. Satzes 1. Zusatzes aus dem 2. Zus. folgern kann.

65. Satz. 5. Zusatz.

.... also ..... = DEQ]

W. DEI = DEQ + QEI

Nun sind die Dreyecke DQE, IQE rechtwinklicht; Also

QDE + DEQ = Rect.
= QEI + QIE (13. S. 2. Z.)

Folglich

DEQ + QEI = QDE + DEQ
DEQ = DEQ

QEI = QDE;
DEQ + QEI, = QEI + QIE
QEI = QEI

DEQ = EIQ

folglich ..... wäre]

Wenn man statt DQ den dafür gefundenen Werth $\frac{DEq}{2r}$ in den Ausdruck $2\pi r DQ$ (65. S.) sezt;

so

so erhält man die im Buche gefundene Formel für ein Stück der Kugelfläche das sich vom Pole D bis an einen Kreis EME dessen Ebne die Kugelaxe DI senkrecht schneidet, erstrecket.

Die hier gefundene Formel π . DEq ist bequemer, als die im 65. Satze.

Denn wenn man den Bogen DE des größten Kreises der Kugel, den Abstand des Puncts E von D, in Graden weiß; so kann man leicht, wie die Folge (eb. Trig. 8, 9. Satz.) zeigt, die Sehne DE dieses Bogens, für der Kugel Halbmesser berechnen; und dieß kann man allemal bestimmen, aber nicht DQ oder y im 65. Satze.

Weiß man zweener Oerter E, G, Abstand DE, DEG, vom Pol D in Graden des größten Kreises, so läßt sich das Stück der Kugelfläche EGNME das zwischen den durch E, G gehenden parallel Kreisen enthalten ist, folgendermaßen finden:

Des Bogens DEG Sehne sey DG, und des Bogens DE seine, DE; so ist das Stück Kugelfläche

$$DEGNMD = \pi\ DGq$$

und das

$$DEMD = \pi\ DEq$$

Folglich das Verlangte

$$= \pi\ DGq - \pi\ DEq$$
$$= \pi\ (DGq - DEq)$$

66. Satz.

In . . . . . bedeuten einerley]

Nämlich

K den Mittelpunct der Kugel,

D den obern Pol,

E ein willkührlicher Punct im Kreise der die Kugel beschreibt,

e ein Punct der dem Puncte E unendlich nahe liegt, daß also der Bogen Ee unendlich klein, daher ein unendlich kleines Stück einer Tangente an E ist, welche DK, über D verlängert, (wie in des 126. Fig. oder LXXXIV. Fig. welche die 127. ist) in O schneidet.

EQ und eq, zwey Lothe von E, e auf die Axe DK der Kugel; daher Qq auch unendlich klein.

. . . und das Dreyeck]

Nämlich △ DBK.

Es ist . . . . . unterschieden ist]

Indem nämlich der Quadrant DEG die halbe Kugel beschreibet; so beschreibet das rechtwinklichte Dreyeck Oqe (LXXXIV. Fig.) einen senkrechten Kegel, dessen Grundfläche der Kreiß den qe beschreibet und die Spitze in O.

Das Kugelstück nun, das zwischen den von QE, qe beschriebenen Kreisen enthalten ist, kann

man,

man, weil Ee unendlich klein, als ein Stück dieses Kegels ansehen.

Selbiger wird nämlich mit der Grundfläche parallel von dem Kreise, den QE beschreibet, durchschnitten; und der abgekürzte Kegel zwischen beyden Kreisen, ist das Kugelstück. Diesen abgekürzten Kegel aber kann man (weil Q q unendlich klein und QE unendlich wenig von qe unterschieden ist,) als einen Cylinder ansehen, dessen Grundfläche der Kreis den QE, (welches hier wie im 65. Satze = y gesezt) beschreibt, und Höhe das unendlich kleine qQ; wie dieß vollkommen begreiflich wird, wenn man im 61. Satze 5. Zusatze, Kegel und Cylinder statt Pyramide und Prisma, sezt; also ist er ꝛc. (S. Buch.)

also . . . . . = dem ꝛc.]

Das Kugelstück, das zwischen den Kreisen, die QE, qe beschreiben, enthalten ist, war $= \pi y^2 . Qq$, das Kegelstück zwischen den von QH, qh, beschriebenen Kreisen hingegen, $= \pi QH^2 . Qq$: Also beyder Summe

$$= \pi y^2 . Qq + \pi QH^2 . Qq$$
$$= \pi Qq (y^2 + QH^2);$$

oder, (weil $QH^2 + y^2 = r^2$)

$$= \pi . Qq . r^2 = \text{dem ꝛc. (S. Buch.)}$$

. . . . ein Stück des Cylinders]

Nämlich des von dem Quadrate DKGB beschriebenen Cylinders.

$$\therefore \text{ so ist } \ldots\ldots\ldots S = \frac{\pi\, d^3}{2 \cdot 3}$$

Da $d^3 = 8\, r^3$; so ist $r^3 = \frac{d^3}{8} = \frac{d^3}{2 \cdot 4}$; folglich S oder

$$\frac{3}{4}\pi\, r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{d^3}{2 \cdot 4}$$

$$= \frac{4 \cdot \pi\, d^3}{3 \cdot 2 \cdot 4}$$

$$= \frac{\pi\, d^3}{2 \cdot 3}$$

Man findet also den körperlichen Inhalt einer Kugel, wenn man von der Ludolphischen Zahl so viel Ziffern nimmt, als es die vorgesezte Schärfe erfodert, und multiplicirt sie in den 6ten Theil des Würfels der Kugel Durchmesser.

Exempel.

Der Durchmesser der Kugel des 65. S. 5. Zusatzes war 6544000 Toisen; Ihr körperlicher Inhalt ist also

$$\frac{\pi \cdot 6544000^3}{6}$$

wo man π aus des 43. Satzes Anmerkung bis auf die — 22 Ordnung ausdrücken müßte, um diesen Inhalt genau in einzelne Cubiktoisen zu haben; Stellte man würklich die Berechnung an;

so

so würde man eine Menge Cubiktoisen erhalten, die nicht viel von der Menge, die die Erdkugel enthielte, unterschieden wäre.

66. Satz. 1. Zusatz.

Da jedes Qq das sich in DK nehmen läßt, ein Kugelstück und ein Kegelstück wovon ersteres zwischen den von QE, qe, und lezteres zwischen den von QH, qh, beschriebenen Kreisen enthalten ist, giebt, und zusammen ein Stück des von DKGB beschriebenen Cylinders das zwischen den Ebnen gedachter Kreise liegt, ausmachen, so erhellet, daß dieß auch für jedes in DQ genommene Qq statt findet; und also alle solche Kugel und Kegelstücke zwischen den Ebnen DB, DE, so viel als alle dazwischen liegende Cylinderstücke, betragen; Aber diese Kugelstücke machen das Kugelstück zwischen D und dem Kreis den QE beschreibet, aus, so wie alle diese Kegelstücke den abgekürzten Kegel zwischen den von QH, QB beschriebenen Kreisen, und alle diese Cylinderstücke den Cylinder dessen Höhe DQ und Grundfläche DB ist.

Heißt nun das Kugelstück f, der abgekürzte Kegel t, und der Cylinder C; so ist

$$f + t = C$$

Also

$$f = C - t.$$

66. Satz. 2. Zusatz. Anm.

. . . daß Körper bey denen ꝛc.]

Nach diesem Satze sezt man die Würkungen, z.

Exempel zweener Menschen verschiedener Größe, in die Cubikverhältniß ihrer Längen.

Ein Mensch, der z. B. 9 Ellen lang wäre, müßte 27mal mehr z. E. essen, als ein Mensch von 3 Ellen Länge; weil jener dreymal größer als dieser, und folglich ihre Wirkungen sich wie 27 : 1 verhalten. Dieser Mensch von solcher Riesengröße würde also jede Mahlzeit so viel verzehren, als 27 holländische Bauern essen können — —

Caspar Schott giebt (Physica curiosa, p. 509 seqq.) noch größere Riesen, und also noch größere ungereimte Dinge, an, wiewohl er die Riesen für erdichtet hält, die länger als 10 Ellen sind.

Völlig auf ähnliche Art läßt Swift die Lilliputer berechnen, wie viel von ihren Leibern in des auf ihrer Insel angelangten Capitän Guliver seinem enthalten sind. Einen Lilliputer aber erschaffet Swift 12mal kleiner als den Capitän. —

66. Satz. 4. Zusatz.

Weil $6 . S = \pi d^3$]

Nach dem 68. Satze ist

$$S = \frac{\pi d^3}{6}$$

Also

$$6 S = \pi d^3;$$

woraus nach Arithm. V. 33. die im Buche angegebene Proportion folgt.

Sie

Sie hat . . . . . Schärfe.]

Sie ist viel zu klein, weil, wenn man $1 : \pi =$ $1 : 3,14$ sezt, man $1 : \pi$ und daher auch $3 : \frac{1}{2}\pi$ viel zu klein nimmt. Genauer ist $3 : \frac{1}{2}\pi =$ $3 : 1,570796326794$, und so weiter; oder $=$

$$3 : \frac{1}{12}\,1570796326794 \ldots .$$

66. Satz. 3. Zusatz.

Einer Kugel Durchmesser sey d, einer andern aber, deren Inhalt nS, (wo n jede Zahl seyn kann) D: Man sucht D.

Nach dem 2. Zusatze ist

$$S : nS = d^3 : D^3$$

das ist

$$1 : n = d^3 : D^3 \text{ (Ar. V, 21.)}$$

Also

$$D^3 = nd^3$$

Also

$$D = \sqrt[3]{nd^3}$$
$$= d\sqrt[3]{n}.$$

Exempel.

Einer Kugel Durchmesser D zu finden, die sich zu einer andern Kugel verhält wie 27 : 64.

Dieß ist mit dem einerley:

Den Durchmesser D einer Kugel anzugeben, deren Inhalt $\frac{64}{27}$ S ist.

Hier

Hier ist also

$$n = \frac{64}{27}$$

folglich

$$D = d\sqrt[3]{\frac{64}{27}}$$

$$= \frac{d.\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{27}.}$$

$$= d.\frac{4}{3}$$

$$= \frac{4}{3}d$$

Wenn man also D so groß als $\frac{4}{3}$ d nimmt, oder dem Durchmesser der größern Kugel, $\frac{4}{3}$ des der kleinern, giebt; so erhält man das Verlangte.

66. Satz. 6. Zusatz.

. . . . so ist ꝛc. ꝛc.]

So ist, (da $S = \frac{6d^3}{\pi}$, und

daher $6 . S = \pi . d^3$)

$$d^3 = \frac{6\,S}{\pi}$$

$$= 6\,S\,\frac{1}{\pi}$$

Aber

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{3,141\ldots} = 0,318\ldots\ldots$$ (44. S. 5. 3.)

Also

Also

$$d^3 = 6 . S \times 0,318 \ldots$$

Folglich

$$d = \sqrt[3]{6 . S \times 0,318 \ldots .}$$

wo man von $\frac{1}{\pi}$ so viel Ziffern nimmt, als die Schärfe der Rechnung erfodert.

66. Satz. 7. Zusatz.

Nach dem 66. Satze ist auch

$$S = \tfrac{4}{3} \pi r^3;$$

Also

$$= \tfrac{4}{3} \pi rrr$$

$$= \frac{4 \pi r^2 r}{3}$$

$$= 2 \pi r^2 \tfrac{1}{3} r$$

Nun ist $4 \pi r^2 =$ der Kugelfläche (65. S. 1. Z.) Folglich ist der körperliche Inhalt der Kugel dem Inhalte ꝛc. (S. Buch)

66. Satz. 8. Zusatz.

Ein Cylinder C der zur Grundfläche der Kugel größten Kreis, zur Höhe aber ihren Durchmesser d hat, ist doppelt so groß als ein Cylinder c von eben der Grundfläche, dessen Höhe hingegen der Kugel Halbmesser r ist

Eben so ist es bey zween Kegeln K, k, die beyde der Kugel größten Kreis zur Grundfläche haben, aber, K ihren Durchmesser und k deren Halbmesser zur Höhe.

Denn

Denn c und k bedeuten den Cylinder und Kegel in der Auflösung des 66. Satzes. Also ist

$$c = \pi r^3$$
$$k = \tfrac{1}{3}\pi r^3$$

Aber

$$C = \pi r^2 \cdot d \text{ (60. S. 6. Z.)}$$
$$K = \tfrac{1}{3}\pi r^2 \cdot d \text{ (63. S. 3. Z.}$$

und

$$d = 2r$$

Also

$$C = \pi r^2 \cdot 2r$$
$$= 2 \cdot \pi r^2 \cdot r$$
$$= 2 \cdot \pi r^3;$$
$$K = \tfrac{1}{3}\pi r^2 \cdot 2r$$
$$= 2 \cdot \tfrac{1}{3}\pi r^2 \cdot r$$
$$= 2 \times \tfrac{1}{3}\pi r^3$$

Folglich

$$C = 2c$$
$$K = 2k.$$

Nun ist

$$S = \tfrac{4}{3}\pi r^3$$
$$= 4 \cdot \tfrac{1}{3}\pi r^3$$

Also, (da $\tfrac{1}{3}\pi r^3 = k$)

$$= 4k$$

Folglich, (weil $K = 2k$)

$$S = 2K;$$

Das heißt:

Eine Kugel ist doppelt so groß, als ein Kegel, dessen Grundfläche ein größter Kreis der Kugel und Höhe ihr Durchmesser ist.

Weil

Weil aber $c = \pi r^3$; so ist

$$k = \frac{1}{3} c$$

also

$$K = \frac{2}{3} c$$

folglich (weil $2c = C$, daher $C = \frac{1}{2} c$)

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot C$$
$$= \frac{1}{3} C;$$

Mithin: (weil $S = 2K$)

$$S = \frac{2}{3} C$$

und

$$\frac{3}{2} S = C.$$

Hieraus hat man die Sätze:

Eine Kugel ist zwey Drittel eines Cylinders, dessen Grundfläche ein größter Kreis der Kugel, und Höhe ihr Durchmesser ist:

Also umgekehrt:

Drey halbe Kugeln geben einen solchen Cylinder.

Folglich verhalten sich C, S, K

wie $1 . C, \frac{2}{3} C, \frac{1}{3} C,$

oder wie $1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3},$
d. i. wie $3, 2, 1,$ } (Ar. V. 21.)

und der Satz in Worten ausgedruckt heißt:

Cylinder, Kugel und Kegel, wovon der erste und lezte Körper einen größten Kreis der Kugel zur Grundfläche, und ihren Durch-

Durchmesser zur Höhe haben, verhalten sich wie die Zahlen, 3, 2, 1.

Dieses ist Archimeds Erfindung, imgleichen auch was des 65. Satzes 3. enthält.

Man hat von ihm zwey Bücher de Sphaera et Cylindro; das erste enthält ausser den Lehren, die unser Herr Autor im 43. S. 4. Zus. 1, erwähnet, auch nebst andern, die bisherigen (65, 66. S.) von der Kugel.

Die guten Ausgaben des Archimeds sämmtlichen Werke sind sehr selten mehr zu haben. Barrow, ehedem Professor der Geometrie zu Cambridge, besorgte 1675 eine Ausgabe in 4. Man hält sie für die beste. Sie enthält ausser Archimeds Werke, auch die des Apollonius von Perga in Pamphilien, und des Theodosius von Tripolis. Jener ist durch die Untersuchung der Kegelschnitte, dieser durch die der Kugelschnitte, berühmt.

Diese beyde, ferner, Archimed und Euklid, sind die vornehmsten mathematischen Schriftsteller des Alterthums.

66. Satz. 8. Zusatz. Anm.

Andere ..... bisherigen ist]

Diese Stücke rechnet man einzeln aus; ihrer Inhalte Summe giebt den Inhalt des Körpers.

Ein

Ein . . . . . in die Geometrie]

Solches Verfahren wäre folgendes:

Um den Inhalt eines irregulären Körpers zu finden, lasse man sich ein prismatisches Gefäß machen; lege den Körper hinein, und giesse Wasser oder sehr feinen Sand darauf, bis dieß in beliebiger Höhe über den Körper steht; messe diese Höhe, und berechne des Prismatis Inhalt unter gedachter Höhe. Hierauf nehme man den Körper heraus, und lasse alles Wasser von ihm wohl abfliessen, oder wenn man Sand gebraucht hat, gebe man ihn oben wieder eine Horizontalfläche; messe abermals die Höhe in der das Wasser oder der Sand nun steht, und berechne dann des Prismatis Inhalt unter dieser Höhe. Von jenem Inhalt diesen abgezogen, giebt den des irregulären Körpers.

Wenn man den Körper nicht von seinem Ort wegnehmen dürfte; so geht dieses Verfahren nicht an. In solchen Fällen verfährt man gemeiniglich so:

Um den Körper läßt man ein holes Prisma bauen: hierauf ein Gefäße machen, daß genau z. E. einen Cubikfuß hält; bemerkt, wie viel solche Gefäße Wasser in den holen Bau hinein gegossen werden müssen, bis es in einer beliebigen Höhe über den Körper steht. Nun rechnet man den körperlichen Inhalt des holen Prismatis unter dieser Höhe, aus, und zieht davon die Menge der hinein ge-

gossenen Cubikfüße Wasser ab. So erhält man das Verlangte.

und zu . . . . . erfinden]

Weiß man wie viel z. E. ein Cubikzoll, Fuß ꝛc. Bley wiegt; so kann man aus dem Gewicht eines andern Stück Bleyes seinen körperlichen Inhalt mittelst der Regel Detri in Cubikzollen, Füßen ꝛc. finden.

Die Hydrostatik lehrt ein anderes Verfahren, den körperlichen Inhalt zu finden.

Aus ihr ist bekannt, daß ein Körper ins Wasser getaugt, weniger wiegt, als in der Luft; und zwar um so viel weniger als eine Portion Wasser von eben dem Raume den er darinne einnimmt, wiegt. Wenn man daher das Gewicht P weiß, daß er im Wasser verliert, und das Gewicht a eines Cubik. zolls z. E. dieses Wassers, so findet sich des Körpers Inhalt durch

$$\frac{P}{a}$$

in Cubikzollen ꝛc.

Bey diesem und dergleichem Verfahren läßt sich an keine geometrische Schärfe gedenken, welche, wir überhaupt auch in der Ausübung nie erreichen, sondern uns nur begnügen müssen ihr so nahe als möglich zu kommen; dieß aber zu erlangen, muß man sich alle Mühe geben.

Ich kann hier nicht umhin Anfängern anzuführen, was Herr **Lambert** in seinen vortreflichen

Bey-

Beyträgen zum Gebrauche der Mathematik I. Th. II. Abtheil, §. 1, 2. deshalb sagt:

„Die Werke der Natur aus der Kunst hängen „von unzähligen besondern Umständen ab, welche „alle dazu beytragen, daß man in demjenigen, so „davon auszumessen ist, an keine geometrische „Schärfe gedenken kann. Kömmt dabey irgend„wo eine krumme Linie vor; so sind diejenigen, „von welchen wir die Gleichungen wissen, viel zu „einfach, als daß sich die Natur damit begnügen „könnte, und daher kommt es, daß was wir aus „solchen Gleichungen finden, nach aller Strenge „zu reden, sich nur auf die angenommene Hypo„these erstreckt, mit der Sache selber verglichen, „davon immer mehr oder minder abweicht, und „alles was man dabey thun kann, ist, daß man „suche die Abweichung so gering zu machen, als „möglich ist.“

„Es ist daher schon längst eingeführt, daß man „in der Ausübung nur in so ferne auf solche Ab„weichungen sieht, in so ferne man sie nicht als „Kleinigkeiten ansehen kann oder in so ferne sie in „der That eine Verbesserung zulassen. In den „übrigen Fällen begnügt man sich die Ausmessung „brauchbar und leichte zu machen, und dieser Ab„sicht wird öfters einer schärfern Bestimmung auf„geopfert, so bald sie in der Ausübung schwerer „und mühsamer wird.“

67. Satz. 2.

Nach des 42. Satzes 5. Zusatze giebt das Pro-

duct der Linien a, b, (1) den Inhalt eines Rechtecks dessen Seiten a, b. Man sieht nämlich diese Linien als Zahlen an, (welches man nach des 24. Satzes, Beweis und dessen Erläuterung allemal kann,) und findet durch das Product a . b eine Menge Quadrate die das Rechteck unter diesen Linien, enthält, und von denen jedes Seite so groß als die Einheit der Zahlen die diese Linien andeuten.

Das Product aus den drey Linien a, b, c, (1) giebt vermöge 57. Satzes 1. Zusatzes den Inhalt eines Parallelepipedi, dessen Länge = a, Breite = b, und Höhe = c. Man betrachtet ebenfalls diese Linien als Zahlen, und findet durch das Product a × b × c eine Menge Würfel, die das Parallelepipedum, unter diese Länge, Breite und Höhe, enthält, und von denen jedes Seite = der Einheit der Zahlen die diese Linien a, b, c, ausdrücken.

67. Satz. 3.

Zwey Rechtecke, deren Seiten a, b, und c, e, verhalten sich allemal wie a × b : c × e oder wie die Mengen der Quadrate die jedes Rechteck enthält.

Aber

$$a \times b : c \times e = (a : c) + (b : e)$$

(Ar. VI. 3.), oder nach des Herrn Prof. Hindenburgs Bezeichnung ist

$$a \,.\, b : c \,.\, e = (a : c)\,(b : e)$$

(Ar. VI. 9, Seite 308 ꝛc.)

Sind

Sind also a, c der Rechtecke Grundlinien, b, c ihre Höhen: So kann man sagen:

Die Verhältniß zweyer Rechtecke (oder der Mengen der Quadrate die jedes Rechteck enthält,) ist aus den Verhältnissen ihrer Grundlinien und Höhen zusammengesezt, wie schon aus des 47. Satzes 5. Zusatze erhellet.

Die Verhältniß zweener Körper, oder vielmehr zweyer Parallelepipeda, deren Längen, a, e, Breiten b, f, und Höhen c, g, ist wie

$$a \times b \times c : e \times f \times g$$

oder wie die Mengen der Würfel die jedes Parallelepipedum oder jeder Körper enthält.

Aber

$$a.b.c:e.f.g = (a:e) + (b:f) + (c:g)$$

(Ar. VI. 4.) oder

$$a.b.c:e.f.g = (a:e)(b:f)(c:g)$$

Also kann man sagen:

Die Verhältniß zweener Körper oder die Mengen der Würfel, die jeder Körper enthält, ist aus den Verhältnissen ihrer Längen, Breiten und Höhen, zusammengesezt, wie auch schon aus des 57. Satzes 8. Zusatze zu ersehen.

67. Satz. 4.

Nach des 42. Satzes 24. Zusatze findet man aus eines Dreyecks doppelten Inhalte durch seine

Grundlinie dividirt, des Dreyecks Höhe; Oder auch: weil dieser doppelte Inhalt = dem Inhalte eines Parallelogramms, daß mit dem Dreyecke gleiche Grundlinie und Höhe hat, (14. S. 3. Z.), durch genannte Division des Parallelogramms Höhe.

Hiesse dieser Inhalt = a . b, die Grnndlinie = c; So erhielte man zur Höhe eine Linie, so groß als $\frac{ab}{c}$.

Eigentlich erhält man eine Zahl in eben den Einheiten ausgedrückt, aus den die Zahl, die c andeutet, besteht.

67. Satz. 6.

Jedes Paar Linien, wie a, b, hat eine gewisse Verhältniß:

Denn sie sind ein Paar gleichartige Größen, und können also mit einander verglichen werden.

Nun kann jede Linie als eine Zahl angesehen werden.

Sind also m und n solche Zahlen die die Linien a, b ausdrücken, sich aber auf einerley Einheit beziehen: So ist offenbar

$$a : b = m : n$$

Oder

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

Also hat ein Paar Linien allemal eine Verhältniß die ꝛc. (S. Buch.)

67. Satz. 7. 8.

Die Verhältniß a : b bleibt für die Linien a, b immer dieselbe.

Drückt nun die Zahl m allemal die Linie a, und die Zahl n die Linie b, aus, aus welchen Einheiten m, und n auch bestehen, wenn nur beyde Zahlen von einerley Einheit gemessen werden:

So bleibt auch die Verhältniß m : n immer dieselbe, und der Quotiente $\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$ allemal einerley, was man auch für ein Maaß braucht, wenn es nur bey beyden Linien eben dasselbe ist.

Dieser Quotient ist also eine Zahl deren Einheiten von keiner gewissen Art sind.

Er ist folglich eine ungenannte Zahl.

67. Satz. 10.

$$\frac{e \cdot f \cdot g}{a \cdot c} = \frac{e}{a} \cdot \frac{f}{c} \cdot g$$

Aber $\frac{e}{a}$ und $\frac{f}{c}$ sind nach (7, 8.) ungerade Zahlen:

Also ist $\frac{e \cdot f \cdot g}{a \cdot c}$ ein Product aus ein Paar ungerade Zahlen $\frac{e}{a}$, $\frac{f}{c}$ in die Linie g; oder diese Li-

nie soll mit den Zahlen multiplicirt werden, davon die eine anzeigt, was für ein Stück von a oder wie oft a in e, und die andere welches Stück oder wie vielmal c in f enthalten ist.

Man erhält folglich eine Linie die um das Pro-

duct $\frac{e}{a} \cdot \frac{f}{c}$ größer als g ist.

Beyde Linien aber, haben folgende Verhältniß

$$\frac{e}{a} \cdot \frac{f}{c} \cdot g : g$$

welche nach Ar. V. 21. wie

$$\frac{e}{a} \cdot \frac{f}{c} : 1$$

ist.

67. Satz. 10. *)

Also eine ..... multiplicirt]

Durch diese Multiplication erhält man eine Flä-

che die $\frac{e}{c}$ mal größer als die Fläche, deren Inhalt

sich durch f . g ausdrücken läßt.

Beyde Flächen aber haben folgende Verhältniß:

$$\frac{e}{c} \cdot fg : fg = \frac{e}{c} : 1 \text{ (Ar. V. 21.)}$$

Man wird nun verstehen, was

$$\frac{abcd}{eg}$$

*) Dieß sollte eigentlich der Absatz, und folglich der mit 11 ꝛc. bezeichnete der 12. ꝛc. seyn; welches aber Anfänger nicht irren wird.

$$\frac{abcd}{eg} = \frac{a}{e} \cdot \frac{b}{g} \cdot cd$$

sagen will; Nämlich eine Fläche deren Inhalt c . d andeutet durch das Product der Zahlen $\frac{a}{e}, \frac{b}{g}$ (8) multiplicirt,

Diese Fläche ist $\frac{a}{e} \cdot \frac{b}{g} = \frac{ab}{eg}$ mal größer als c . d; und sie verhält sich zu c , d wie $\frac{a}{e} \cdot \frac{b}{g} : 1.$

67. Satz. 13.

Dieser Satz hier, wird im (14, 15, 16,) dargethan.

67. Satz. 16.

Beständen sich..... rechter Hand 1;]

Dergleichen Producte wären

$abcd = fg$

$abcde = fg$

$abcdelmn = fgpq$

u. s. w.

Aber die Division gäbe

$$\frac{abcd}{fg} = \frac{fg}{fg}$$

oder

I) $\frac{a}{f} \cdot \frac{b}{g} \cdot cd = 1;$

Ferner

II)

II) $\frac{abcde}{fg} = \frac{a}{f} \cdot \frac{b}{g} \cdot cde = 1;$

$$\frac{abcdelmn}{fgpq} = \frac{fgpq}{fgpq}$$

oder

III) $\frac{a}{f} \cdot \frac{b}{g} \cdot \frac{c}{p} \cdot \frac{d}{q} \cdot e \cdot l \cdot m \cdot n = 1$

u. s. w.

Dies alles hieſſe:

Für I)

Die Fläche cd mit einem Producte aus ein Paar Zahlen $\frac{a}{f}, \frac{b}{g}$ multiplicirt, gäbe 1

Für II)

Eben ſo viel der Körper cde, mit einem Producte aus ein Paar Zahlen $\frac{a}{f}, \frac{b}{g}$ multiplicirt;

Für III)

Auch das Product der vier Linien e, l, m, n, mit einem Producte aus vier Zahlen $\frac{a}{f}, \frac{b}{g}, \frac{c}{p}, \frac{d}{q}$ multipliciret gäbe 1; u. ſ. w.

Und dieſer 1 ſollte, eine ꝛc. (S. Buch)

67. Satz. 18.

So ſind ..... ausdrückt;]

Nämlich aus

abc = f

muß

muß man

$$abc = fh^2$$
$$= f \cdot h \cdot h$$

und aus

$$abc = 1$$

die Gleichung

$$abc = h^3$$
$$= h \cdot h \cdot h$$

machen.

Jener Ausdruck ($abc = f \cdot h \cdot h$) heißt: Der Körper abc dessen Höhe a, Länge b, Breite c, ist gleich dem Körper, der zur Höhe f, zur Länge und Breite aber h, die angenommene lineariſche Einheit (17), hat; dieſer ($abc = hhh$) hingegen, der Körper abc iſt gleich dem Würfel deſſen Seite h, die angenommene lineariſche Einheit.

Sezt man in jeder dieſer gefundene Ausdrücke $h = 1$ in der Bedeutung wie (17) erfodert, ſo bekommen ſie ihre erſte Geſtalt wieder.

Aus

$$abc = hhh$$

nun, erhält man

$$\frac{abc}{hhh} = 1$$

$$= \frac{a}{h} \cdot \frac{b}{h} \cdot \frac{c}{h}$$

(S. Buche.)

Z. E. Wäre $h = 1$ Fuß $= 12$ Zolle, und $a =$ 4 Zoll,

4 Zoll, b = 16 Zolle, c = 27 Zoll; so ist $\frac{a}{h} \cdot \frac{b}{h} \cdot \frac{c}{h}$

$$= \frac{4}{12} \cdot \frac{16}{12} \cdot \frac{27}{12} = \frac{4 \cdot 16 \cdot 27}{12 \cdot 12 \cdot 12} = 1$$

67. Satz. 19.

Wenn

$$a^2 \cdot b^5 \cdot c = f^3$$

was verständliches bedeuten soll; so muß man sich

$$a^2\ b^5 \cdot c = f^3 \cdot h^5$$

oder

$$a.a.b.b.b.b.b.c = f.f.f.h.h.h.h.h$$

vorstellen

Nun giebt die Division auf beyden Seiten mit f.f.f.h.h.h.h den Quotient

$$\frac{a.a.b.b.b.b.b.c}{f.f.f.h.h.h.h} = \frac{f.f.f.h.h.h.h.h}{f.f.f.h.h.h.h}$$

oder

$$\frac{a}{f} \cdot \frac{a}{f} \cdot \frac{b}{f} \cdot \frac{b}{h} \cdot \frac{b}{h} \cdot \frac{b}{h} \cdot \frac{b}{h} \cdot c = h$$

oder die Linie c mit einem Producte aus sieben Zahlen multiplicirt, ist der Linie h, der angenommenen linearischen Einheit (17) gleich. Wäre diese 1 Fuß; so soll die Linie linker Hand ein Fuß seyn.

Wenn man nun noch einmal mit h der linearischen Einheit dividirt oder

$$\frac{a}{f} \cdot \frac{a}{f} \cdot \frac{b}{f} \cdot \frac{b}{h} \cdot \frac{b}{h} \cdot \frac{b}{h} \cdot \frac{b}{h} \cdot \frac{c}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

macht: So erhält man linker Hand des Gleichheitszeichen ein Product aus acht Zahlen (7, 8), der Zahlen Einheit gleich.

Druckfehler

die sich in Herrn Hofrath Kästners Geometrie gefunden haben.

Seite 160 Z. 5 lies 4 statt 5
— 174 — 11 l. AC statt Ac
— 175 — 7 l. BA = ba statt B = ba
2. S. 3. Z. statt 1. S. 3. Z.
— 176 — 8 l. 34. Fig. statt 35. Fig.
— 177 — 3 l. 36. f. statt 34. f.
— lezte l. EBC ▷ R statt EB ▷ R
— 179 — 15 l. ACB statt ABC
— 181 — 15 l. AMC statt AMF
— 16 l. CFA statt CFC
— 187 — 18 l. DAB statt DBA
— 189 — 18 l. PW statt YP
— 25 l. WQ statt PQ
— 192 — 4 von unten l. BAC statt ABC
— 193 — 4 v. oben l (3. S. 3. Z.) st. (2. S. 3.)
— 195 — 23 l. EBCD statt EACB
— 197 — 6 l. BC statt BA
— 10 l. $\frac{1}{2}$ Δ ABC statt ^{1} Δ ABC
— 198 — 24 l. ECB statt EAB
— 199 — 15 l. ACEH statt AeEH
— 23 l. ABEH statt ACEm
— 210 — 6 l. GPL statt PGL
— 212 — 5 l. p : q statt p q
— 215 — 27 l. 101 statt 201
— 216 — 16 l. 64 : 101 oder 102 statt 64; 101 oder 102
— 218 — 2 von unten l. e ; a statt e : a

Seite 218 Zeile 1 von unten lies ε ; α statt ε : α
— 220 — 21 von oben l. KA statt BA
— 222 — 1 von oben l. 77 * Fig. statt 77 Fig.
— 8 l. 77 * Fig. statt 94. Fig.
— 227 — 6 l. (13. S.) statt (14. S.)
— 29 l. 81. Fig. statt 82. Fig.
— 234 — 6 l. 6, 210 statt 6, 2030
— 7 l. r . 0, 210 statt r . 0, 205
— 8 l. 12, 42 . r statt 12, 41 . r
— 9 l. $\frac{42}{100}$ statt $\frac{41}{100}$
— l. $1° + \frac{42°}{1200}$ statt $1° + \frac{41°}{1200}$
— 235 — 22 l. Zolle statt Fusse
— 25 l. Zoll statt Fuß
— 27 l. Zolle statt Fusse
— 240 — 9 l. giebt statt gilt
— 13 l. DE statt DF
— 241 — 13 l. auf dem Papiere st. auf Papiere
— 21 l. bc statt be
— 243 — 25 l. dc statt de
— 245 — 9 l. auf das Papier statt auf Papier
— vorlezte l. BDC statt BCD
— 247 — 16 l. durch C setzen statt durch setzen
— 257 — 8 l. $\frac{\frac{1}{2}\,h \text{ — Sehn } \frac{1}{2}\,h}{\frac{1}{2}\,h}$; statt
$\frac{\frac{1}{2}\,h \text{ — Sehn } 1\,h}{\frac{1}{2}\,h}$
— 259 — 4 l. also so klein statt also klein
— 266 — 3 l. $\frac{1}{3000\overline{5}}$ statt $\frac{1}{3000\overline{6}}$
— 270 — 12 l. Al statt A

Seite

Seite 275 Zeile 8 lies 7 Zoll statt ¬ Zoll
l. 9 = 5 Zoll statt 9 = 7 Zoll
— 276 — lezte l. 3048′ 15″ statt 3048′ 15′
— 280 — 6 l. $\frac{1}{2}$ (Bb + Cc) statt ^{1}. (Bb + Cc)
— 281 — 21 l. Dreyecke statt Drexecke
— 284 — 9 l. 116050 $\square''$ statt 16050 $\square''$
— 285 — 19 l. $\sqrt{}$ (EAq — AFq) statt $\sqrt{}$ (EAq = AFq)
— 25 l. = $\frac{1}{4} f^2 + r^2 - 2rEF + EF^2$;
statt = $\frac{1}{4} f^2 + r^2 = 2r \cdot EF + EF^2$
— 286 — 10 l. $\sqrt{}$ ($r^2 - \frac{1}{4} f^2$ statt $\sqrt{}$ ($r^2 - \frac{1}{2} f^2$)
— 26 l. 0, 966 statt 0 966
— 289 — 11 l. AI statt MI
— 292 — 3 l. Quotient der statt Quotiender

— 13 l. $\frac{r \cdot (t + x)}{qz} = \frac{rt}{qz} + \frac{rx}{qz}$; statt

$\frac{r \cdot (t + x)}{qz} - \frac{rt}{qz} + \frac{rx}{qz}$

— 293 — 22 l. $\frac{1}{7}$ statt $\frac{1}{7}$
l. $\frac{10}{71}$ statt $\frac{10}{71}$
— 24 l. $3\frac{1}{7}$ statt $3\frac{1}{7}$
l. $3\frac{10}{71}$ statt $3\frac{10}{71}$

— 297 — 20 l. $\frac{P}{P}$ statt $\frac{P}{P}$

$\frac{1}{P}$ statt $\frac{1}{P}$

— 298 — lezte l. 4 . 3, 14 statt 3, 4 . 14
— 303 — 23 l. zwo statt zmo

Seite

Seite 308 Zeile 11 lies 45. S. statt 48. S.
— 313 — 5 l. iu statt iu
— 320 — 13 l. P statt PD
— 321 — 7 l. DCE statt D(F
— 27 l. T
— 323 — 11 l. Cc statt Gc
— 21 l. ABCD statt ABD
— 327 — 1 l. denn statt den
— 329 — 6 l. HCKD statt H(KD
— 17 l. HS, FB statt HS FB
— 331 — 21 l. 16. Z. statt 8. Z.
— 333 — 25 l. Cd statt Gd
— 336 — 6 l. AB. AE. AD; statt AB AE. AD
— 339 — 18 l. 0,9 . 0,57 . 7 statt 0,90,57 . 7
— 348 — 24 l. α statt x
— 351 — 2 l. $f\sqrt{B} - f\sqrt{S}$ statt $f\sqrt{B} = f\sqrt{S}$
— lezte l. $B^2 - S\sqrt{B}\sqrt{S} + B\sqrt{B}\sqrt{S}$
$- S^2$; statt $B^2 - S\sqrt{B}\sqrt{S} + B\sqrt{B}\sqrt{S} - S$
— 359 — 12 l. (1. Z; 4. Z.) statt (1. S. 4. Z.)
— 362 — 2 v. u. l. finden statt finden ist
— 364 — 1 v. o. l. $\frac{5}{3}\pi$ statt $\frac{1}{3}\pi$
— 366 — lezte l. 42. S. statt 44. S.
— 369 — 9 l. (13) statt (14)

Fig. I.

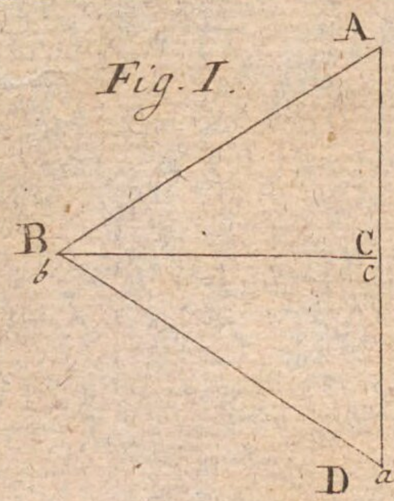


Fig. II.

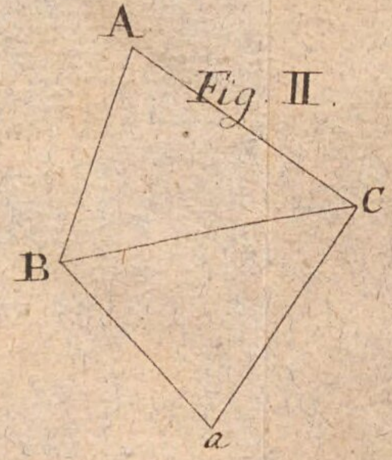


Fig. III

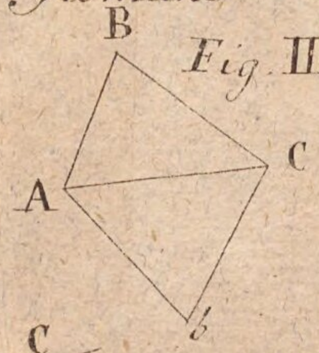


Fig. IV.

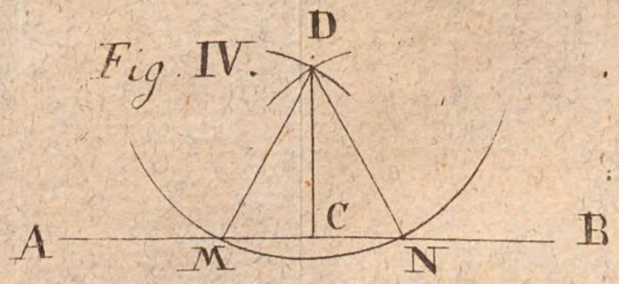


Fig. V

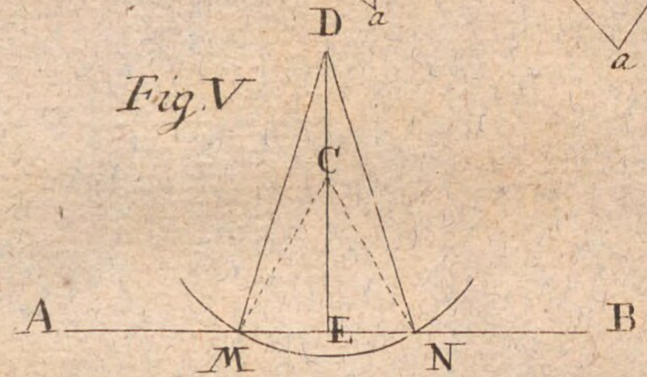


Fig. VI.

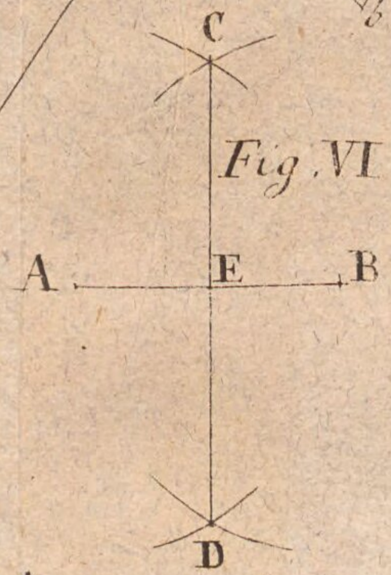
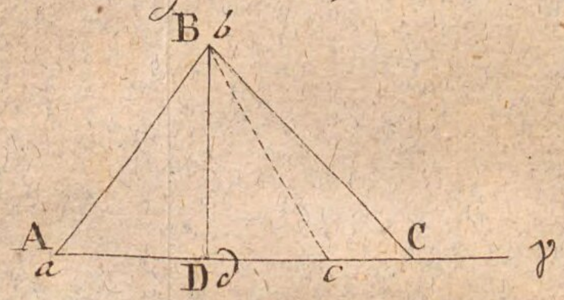


Fig. VIII.



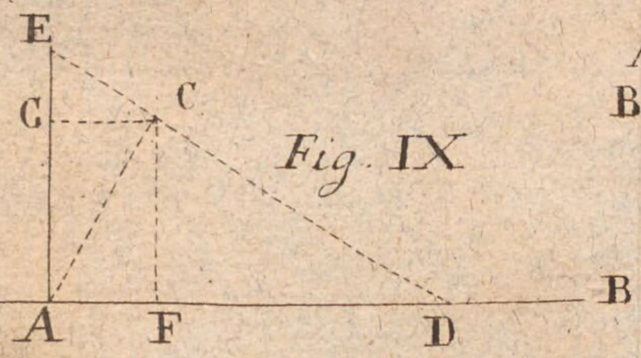


Fig. IX

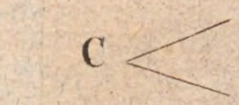


Fig. XII.

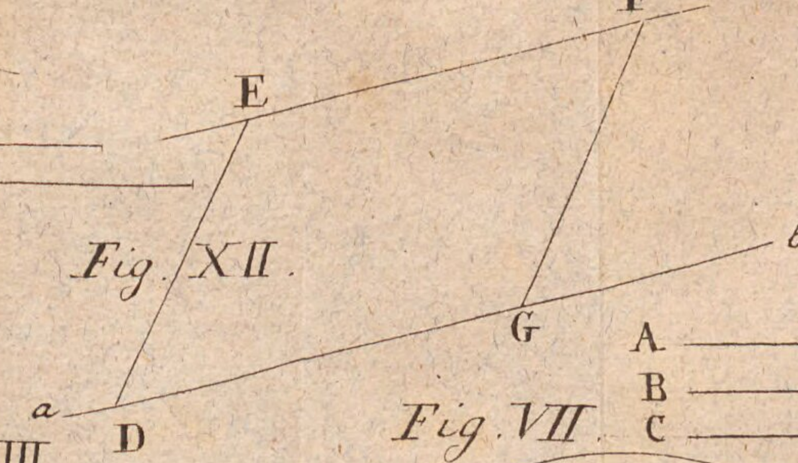


Fig. XI

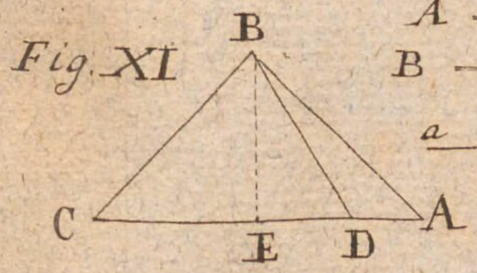


Fig. XIII.

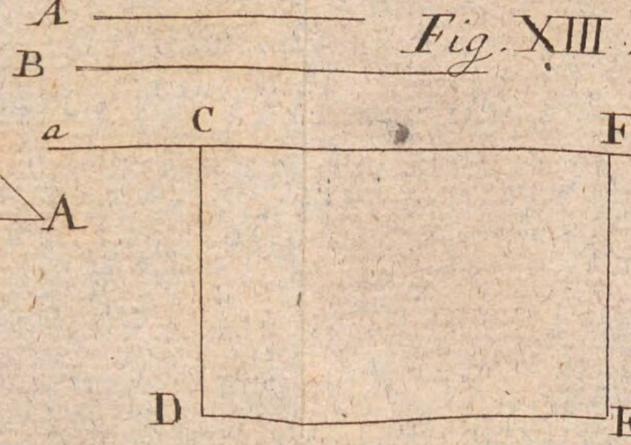


Fig. VII.

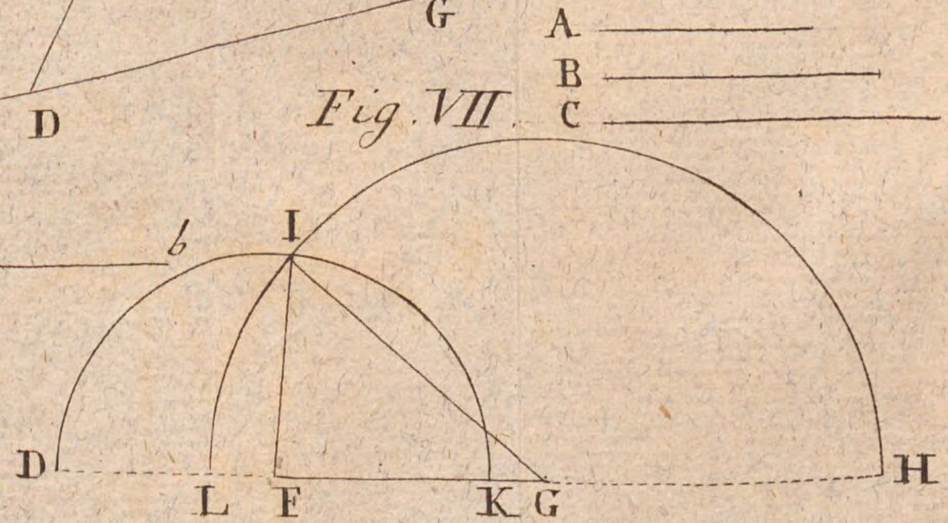


Fig. XIV.

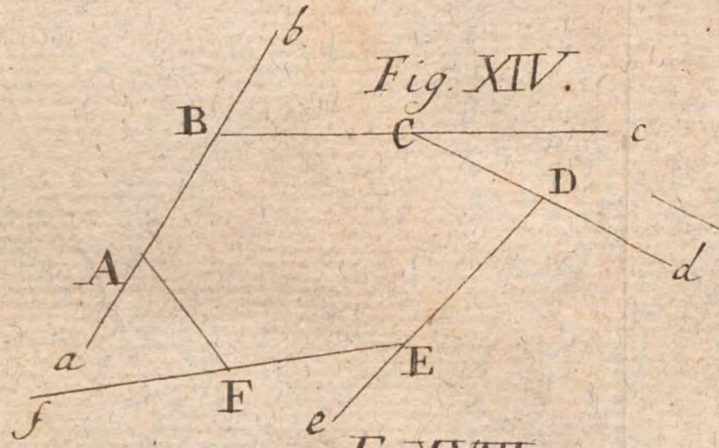


Fig. XV.

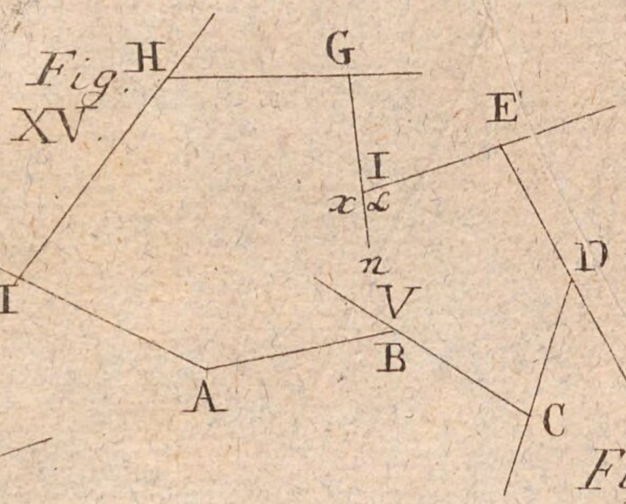
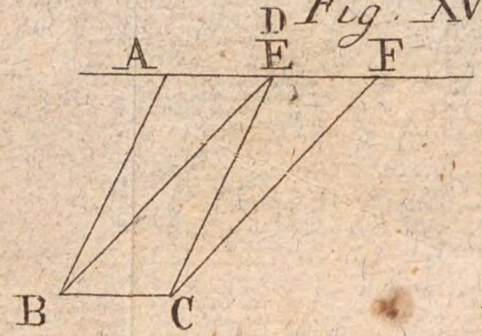
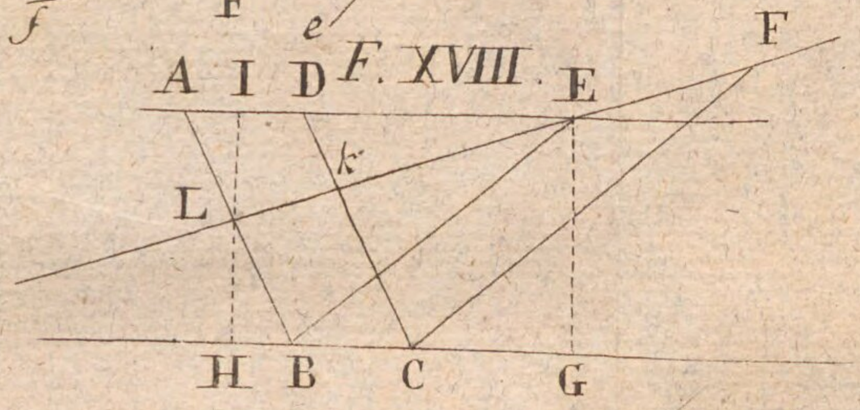


Fig. XVI.



F. XVIII.



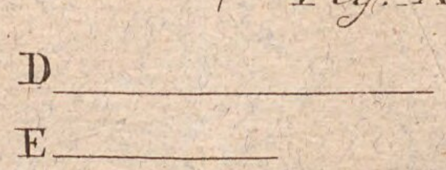


Fig. XXII

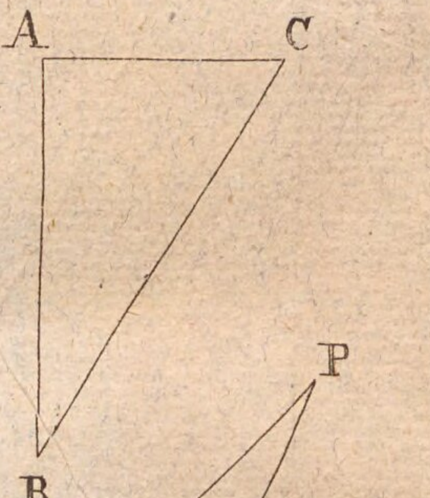


Fig. XIX.

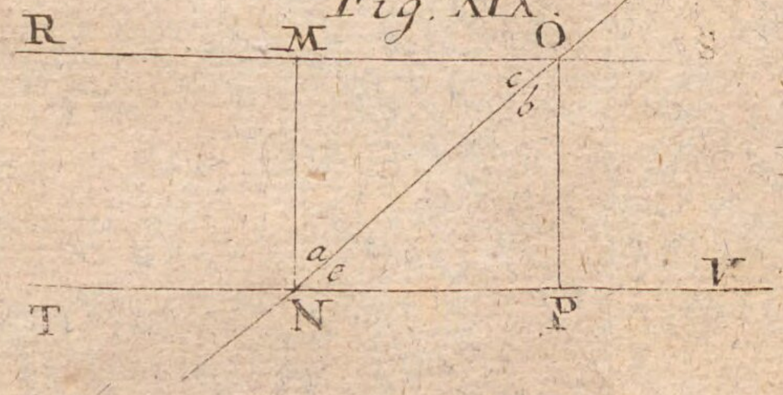


Fig. XXI.

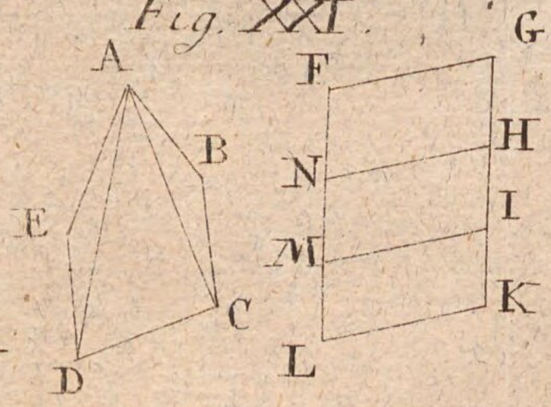
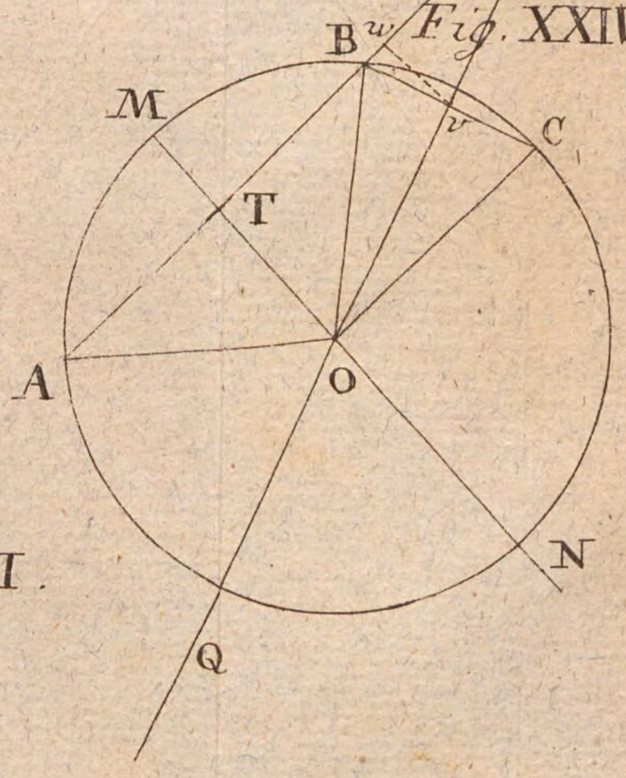


Fig. XXIV



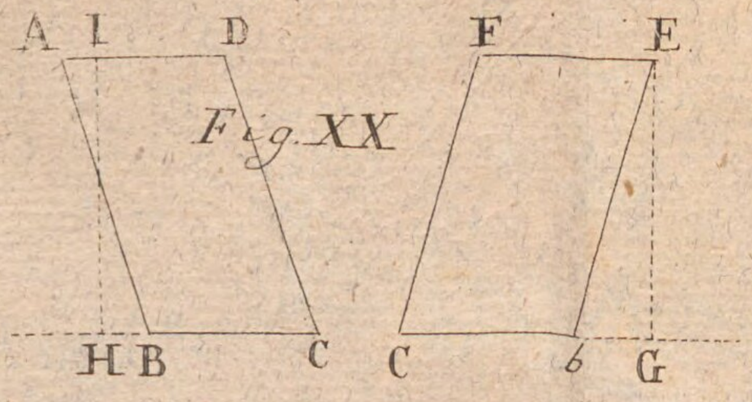


Fig. XX

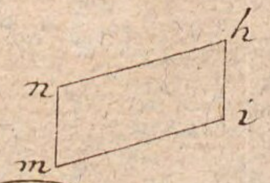
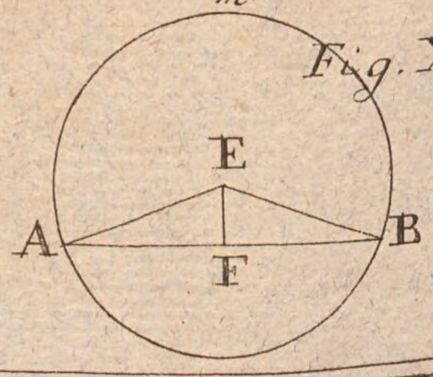


Fig. XXIII.



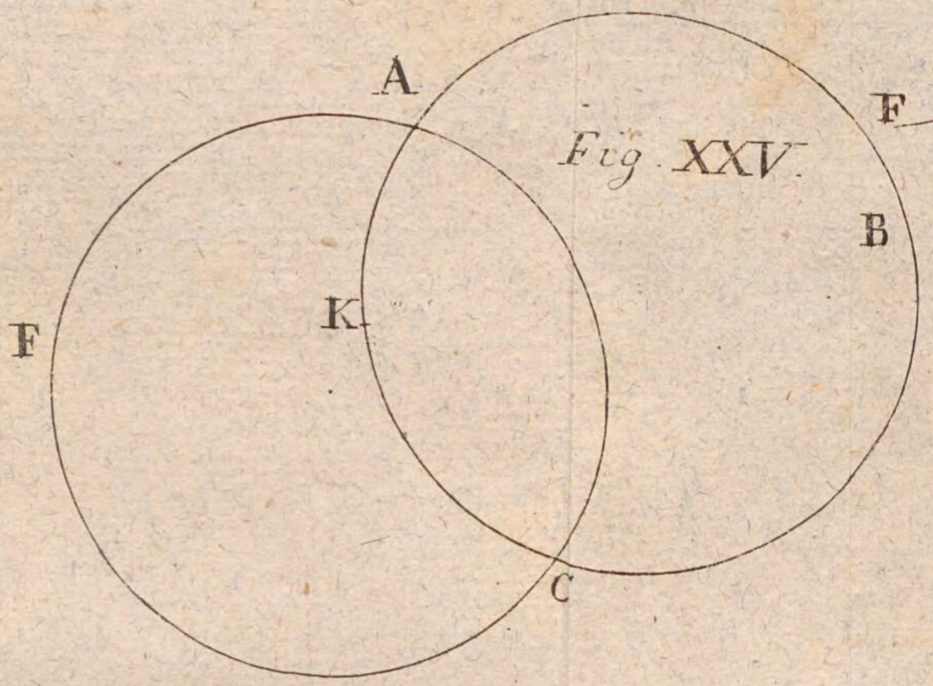


Fig. XXV.

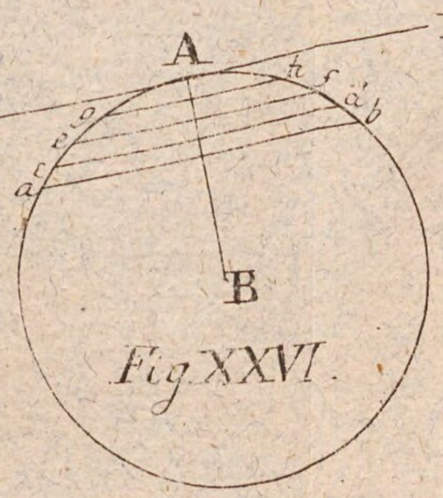


Fig. XXVI.

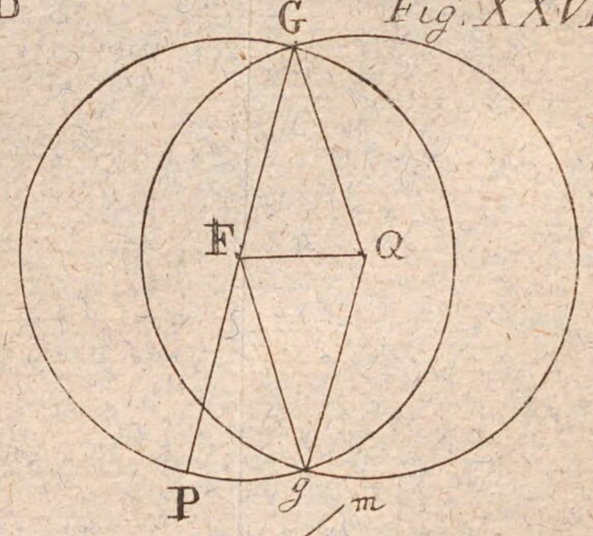


Fig. XXVII.

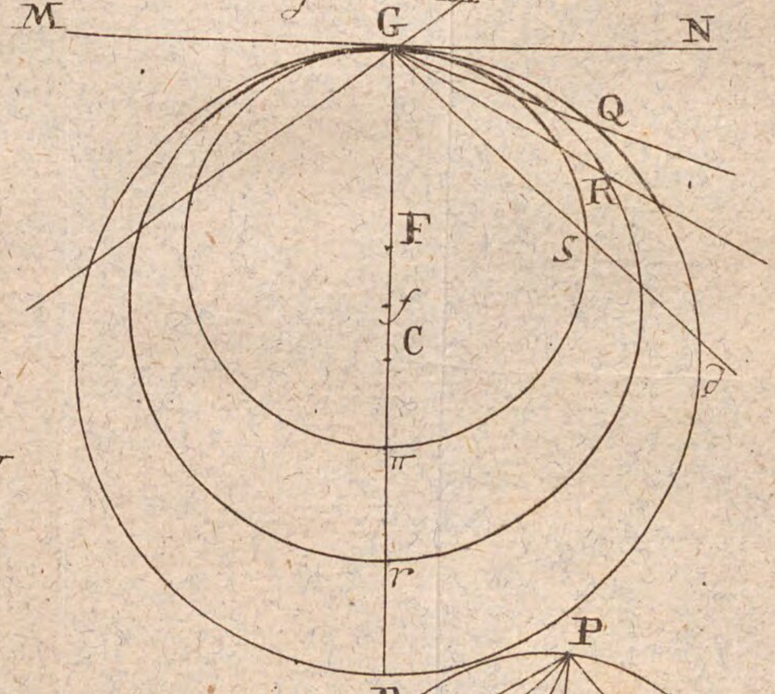


Fig. XXVIII.

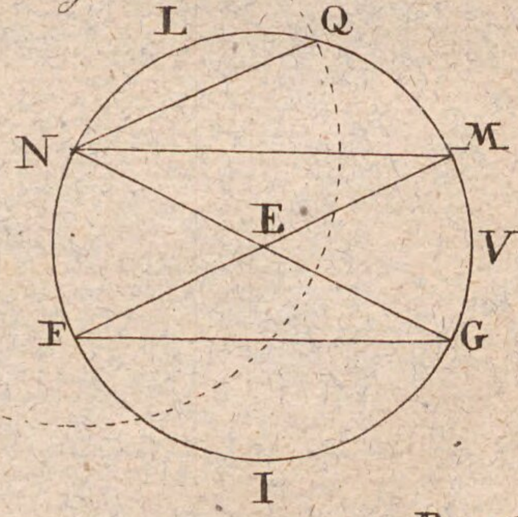


Fig. XXXI.

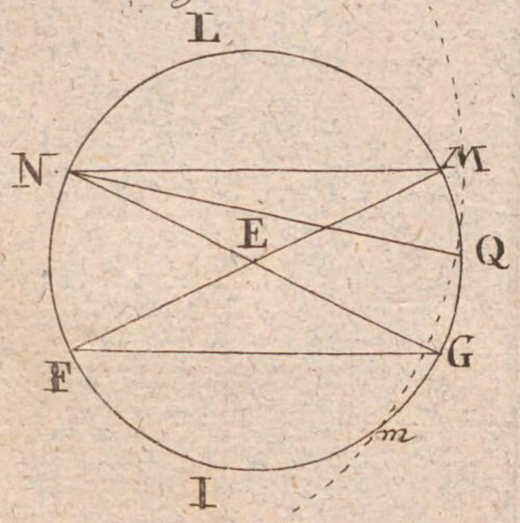


Fig. XXXII.

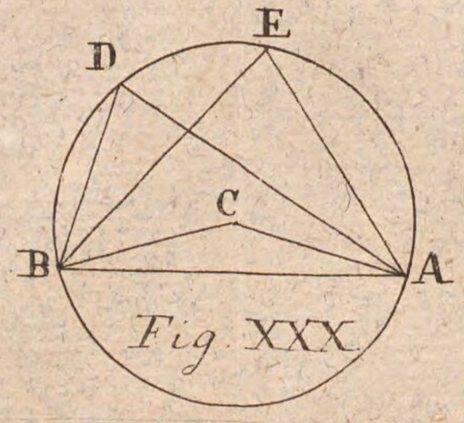


Fig. XXX.

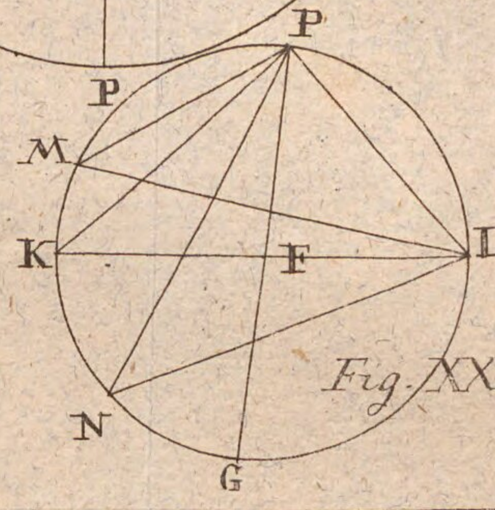


Fig. XXIX.

Fig. XXXIII

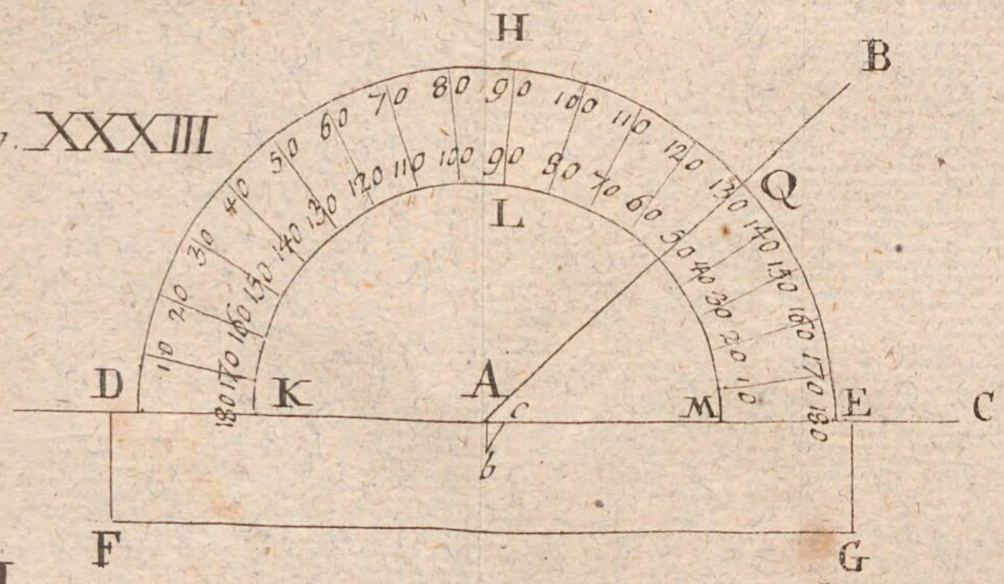


Fig. XXXVI.

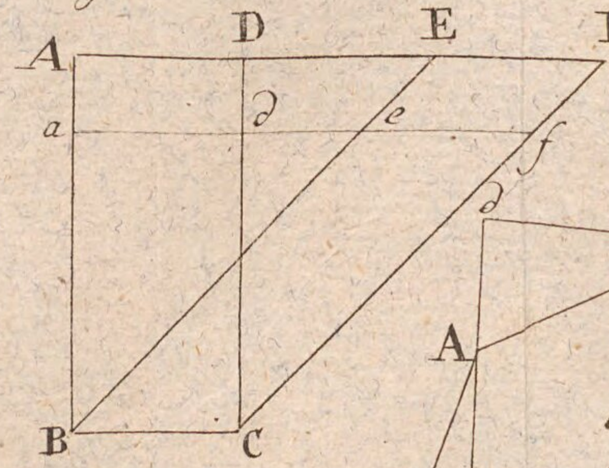


Fig. XXXVII.

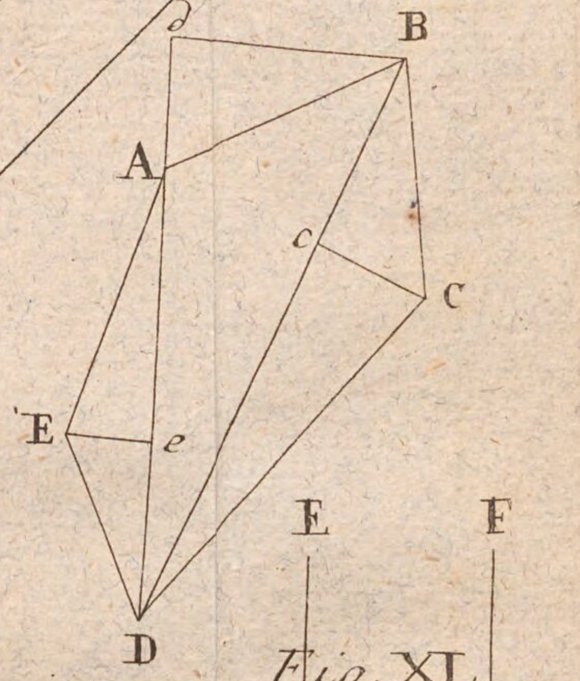


Fig. XXXIV

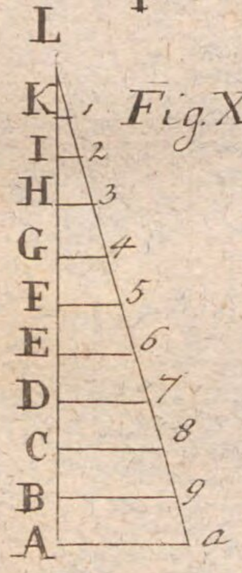


Fig. XXXV.

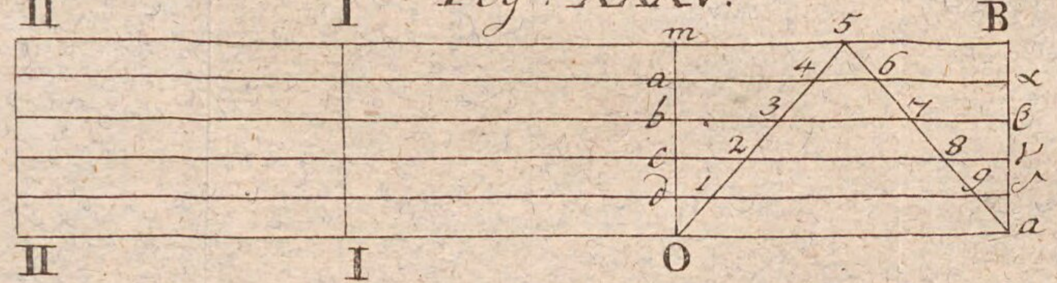


Fig. XL.

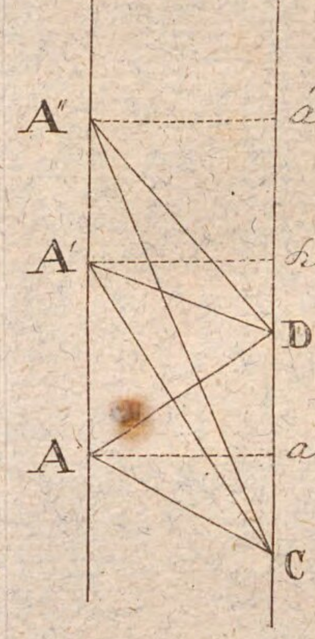


Fig. XXXVIII.

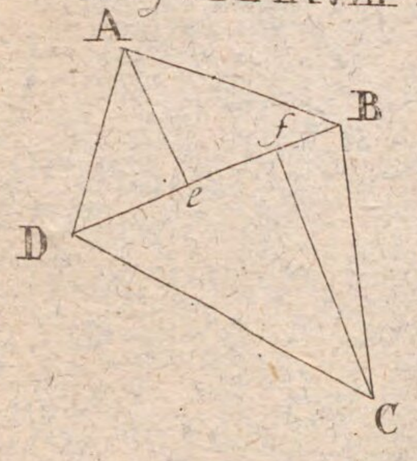
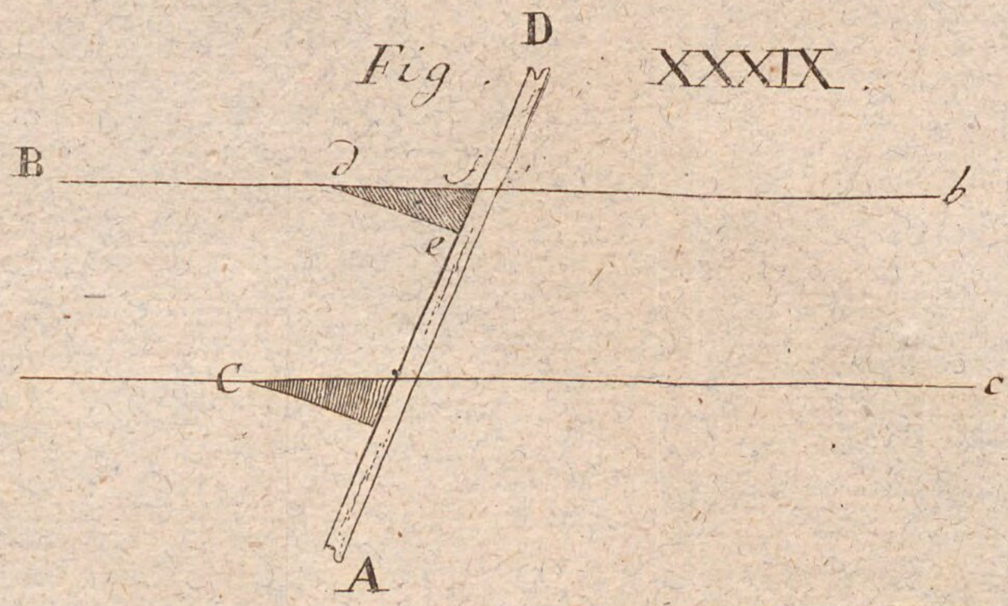


Fig. XXXIX.



II. Th. Tab. IV.

Fig. XLI.

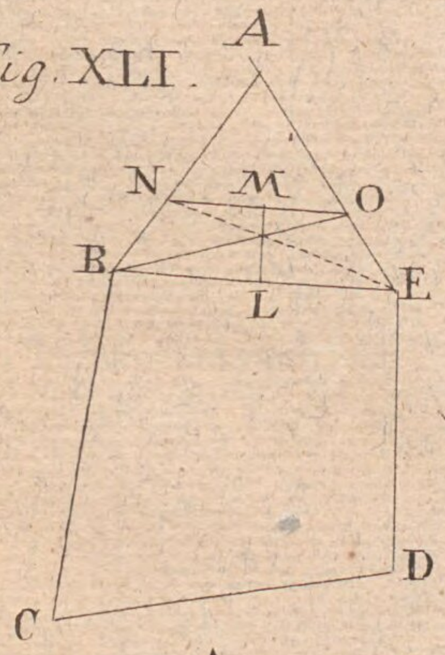


Fig. XLII.

Fig. XLIII.

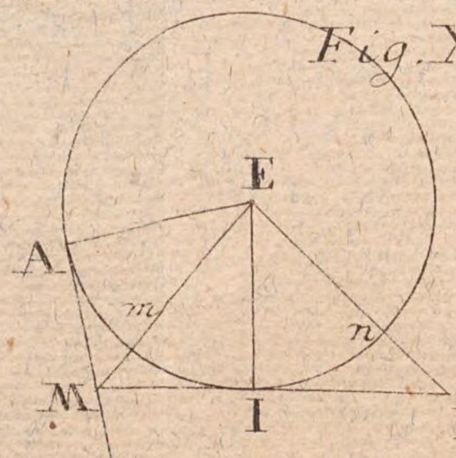


Fig. XLIV.

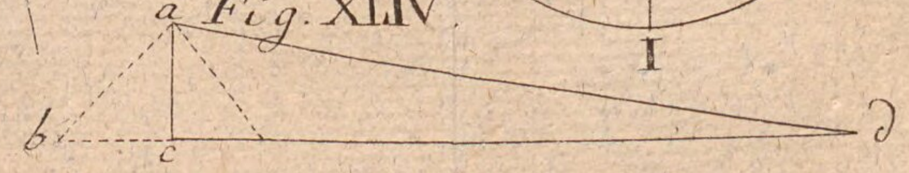


Fig. XLV.

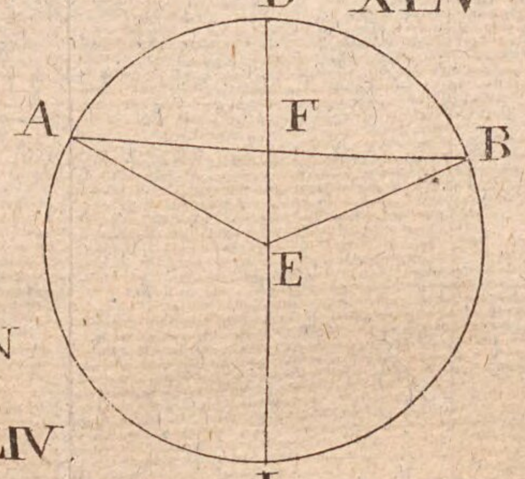


Fig. XLVII.

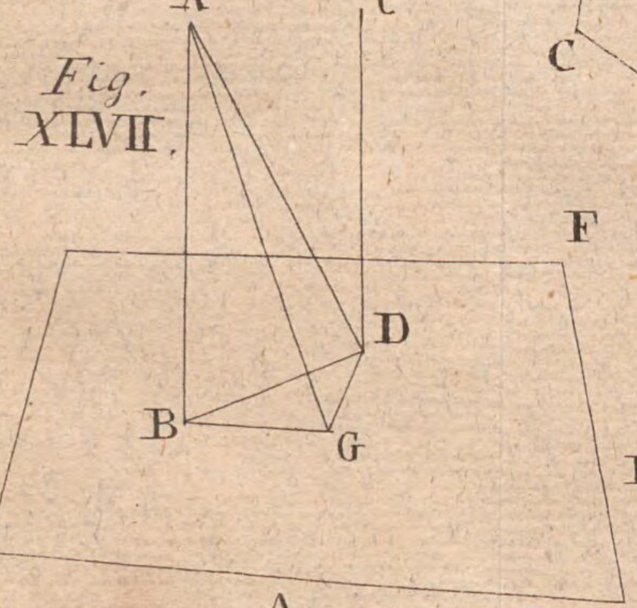


Fig. XLVIII.

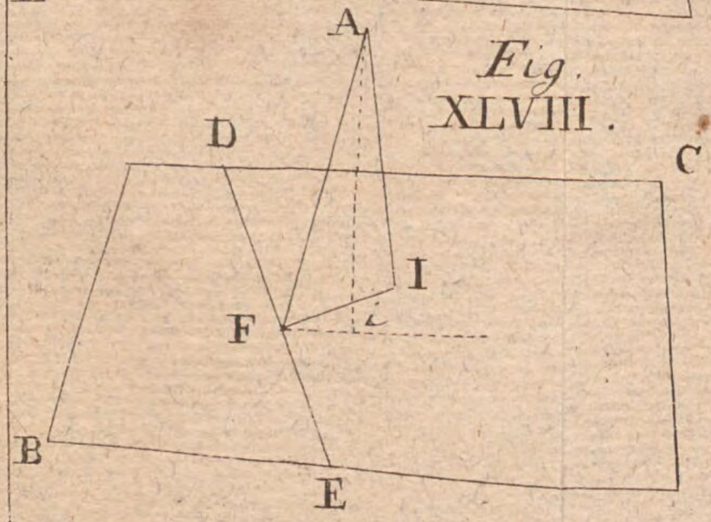


Fig. XLVIIII.

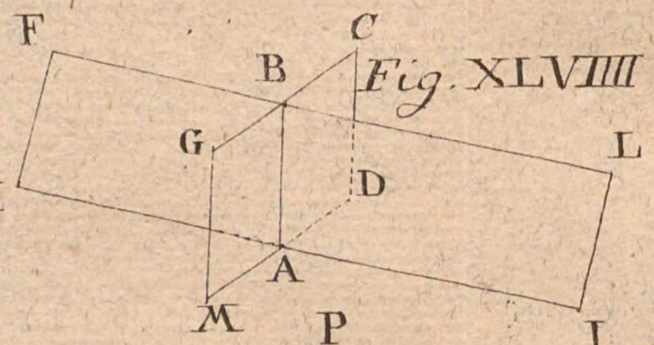


Fig. L.

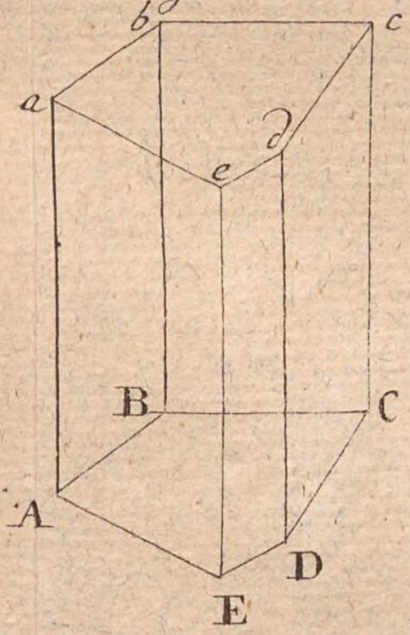


Fig. LI.

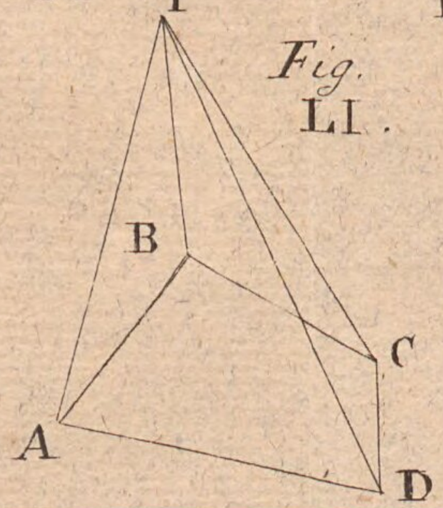
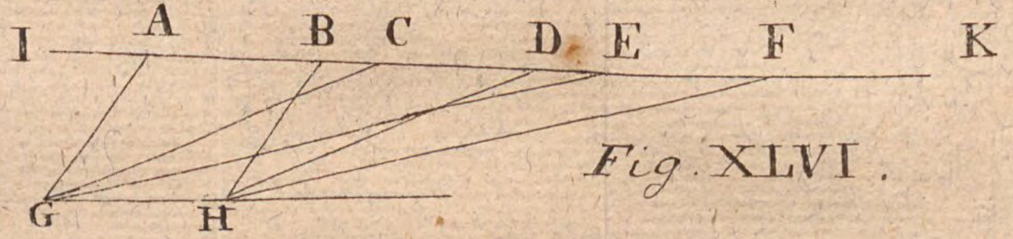


Fig. XLVI.



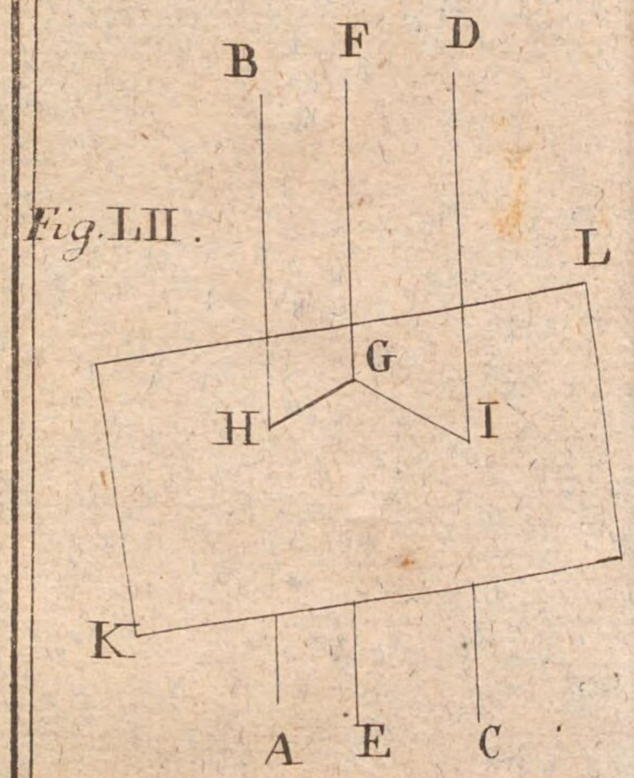


Fig. LII.

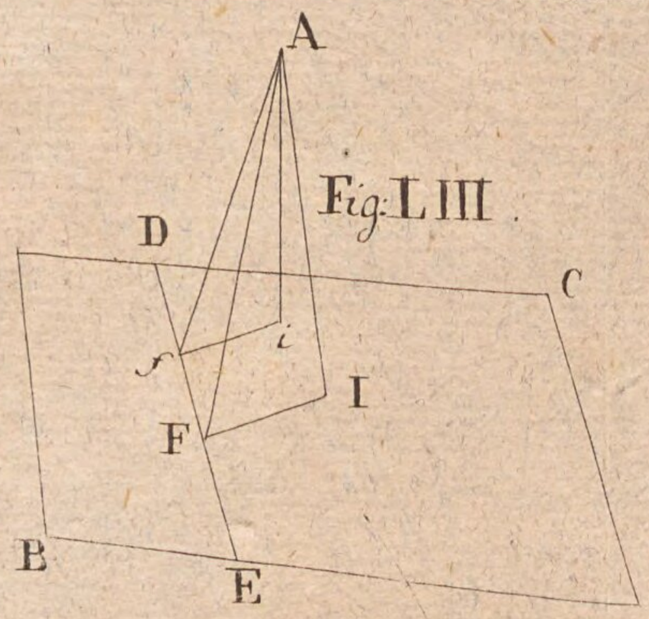


Fig. LIII.

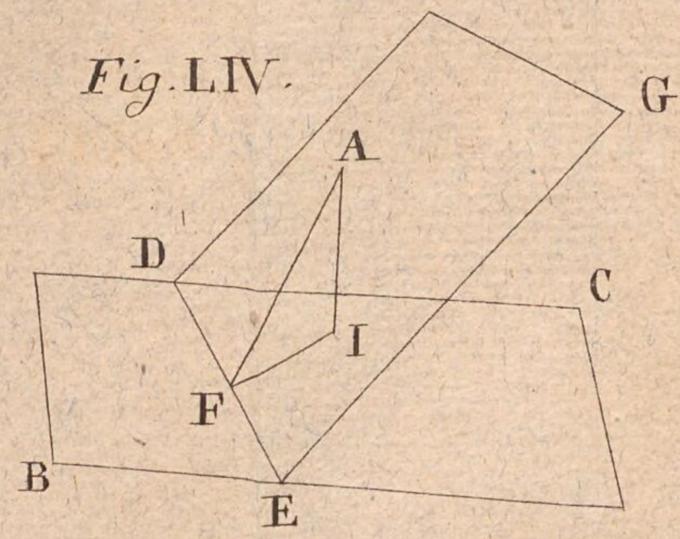


Fig. LIV.

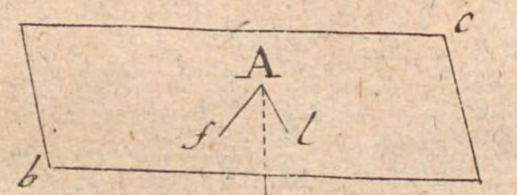


Fig. LV.

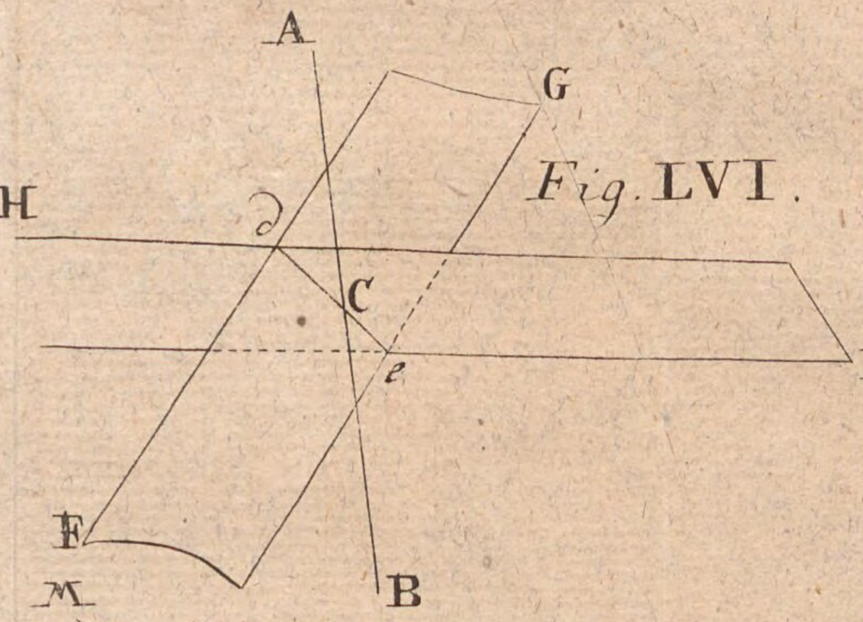
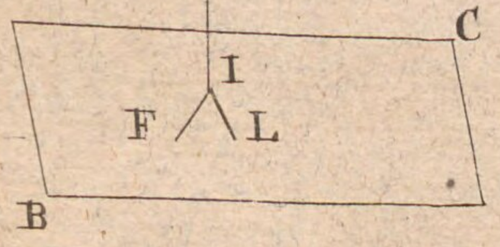


Fig. LVI.



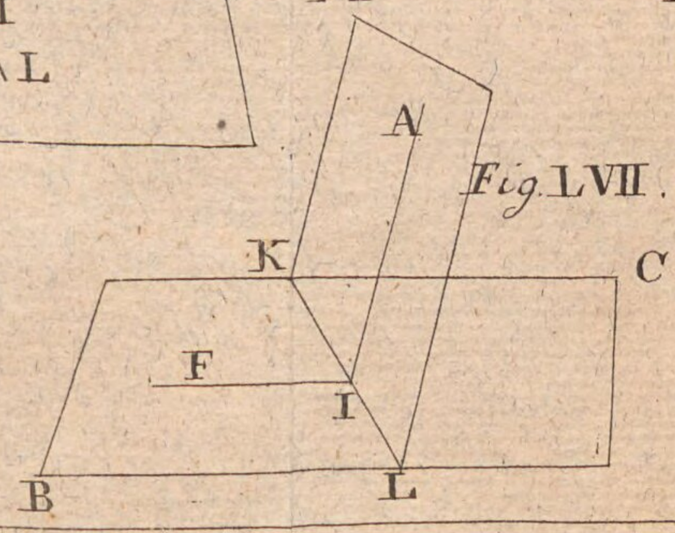


Fig. LVII.

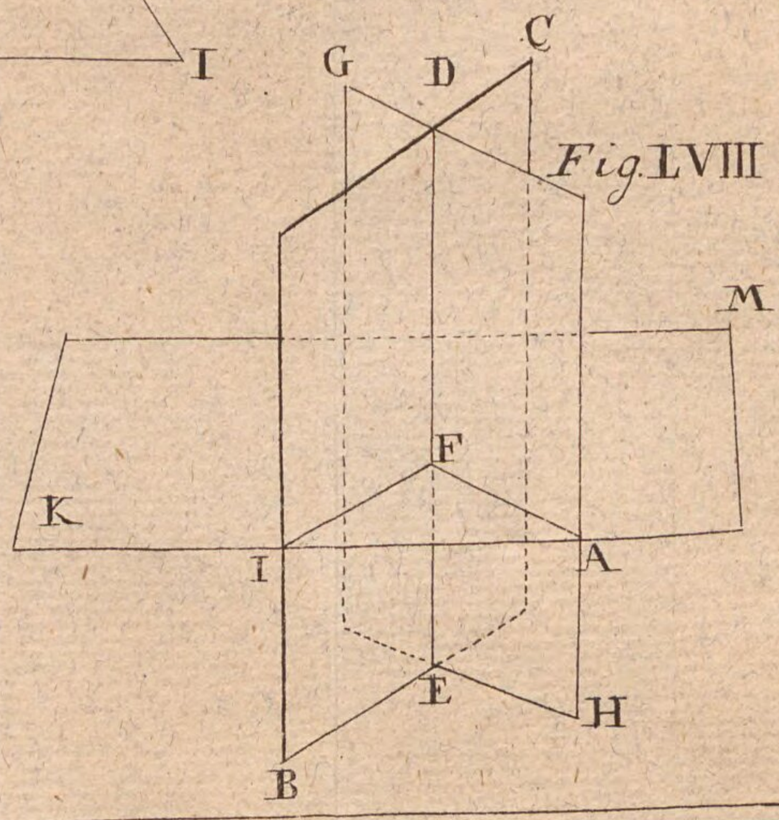
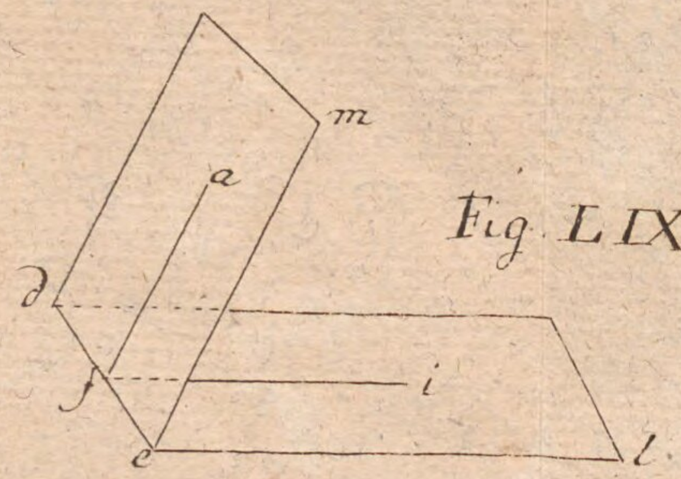


Fig. LVIII.

II. Th: Tab: VI.

Fig. LIX.



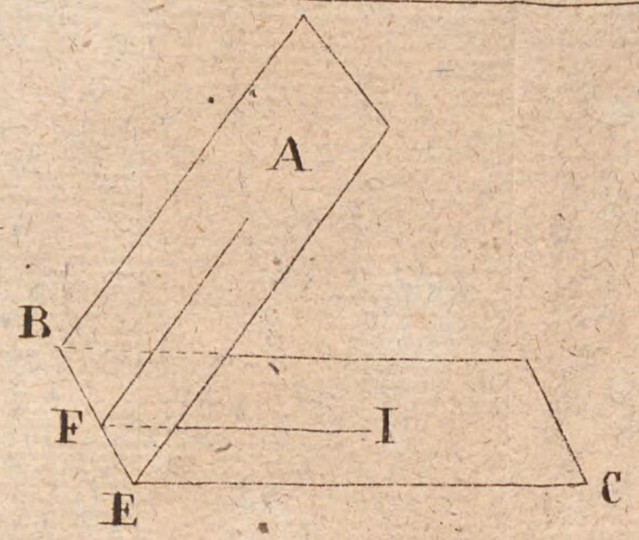


Fig. LXIII.

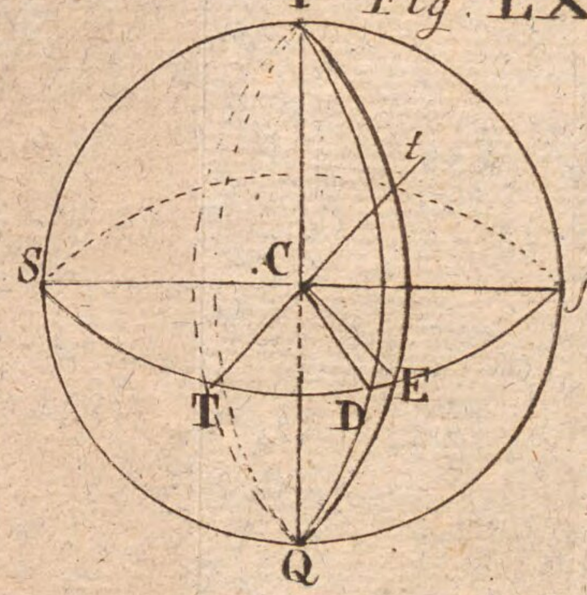


Fig. LX.

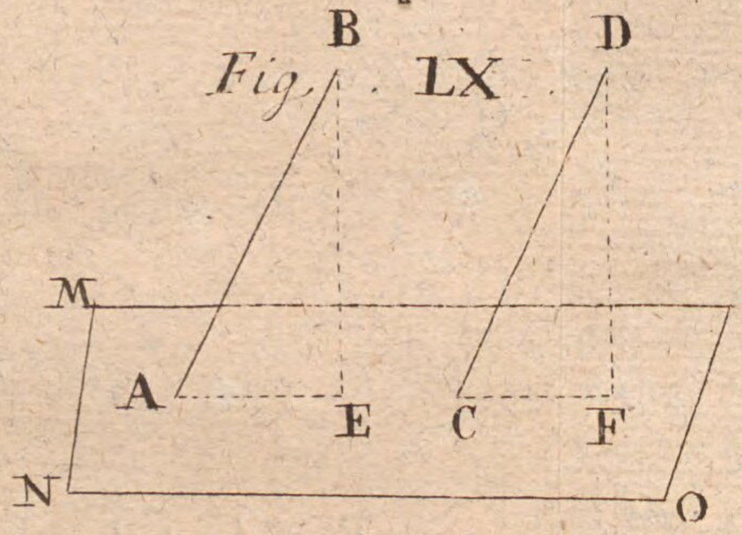


Fig. LXII.

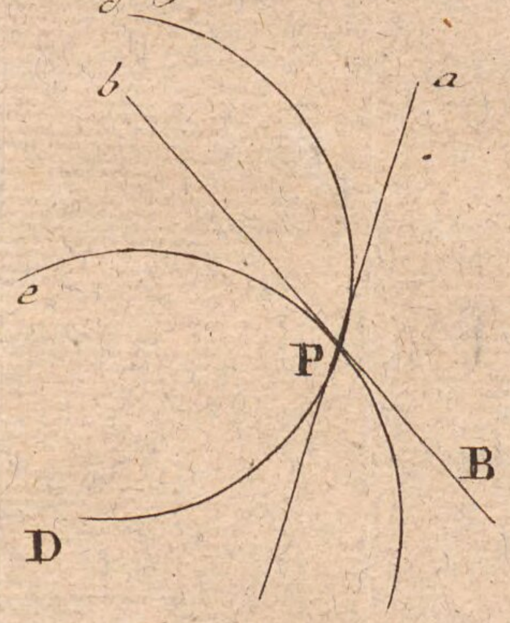


Fig. LXIV.

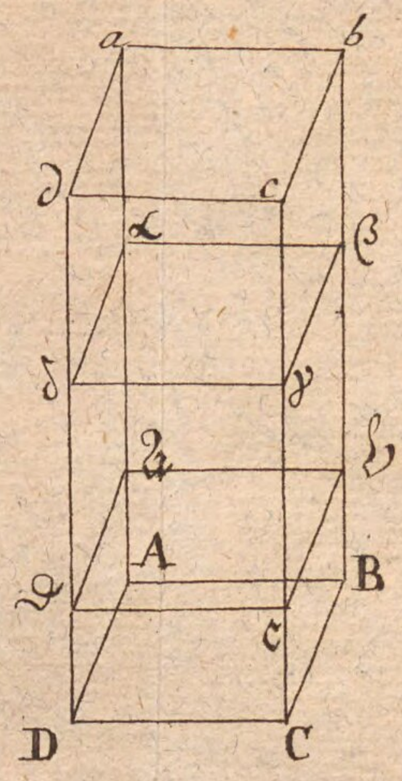
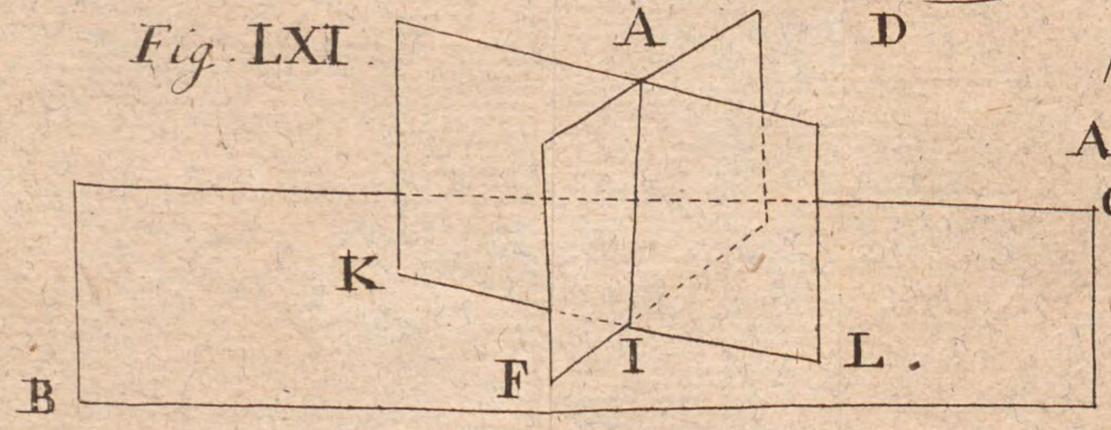


Fig. LXI.



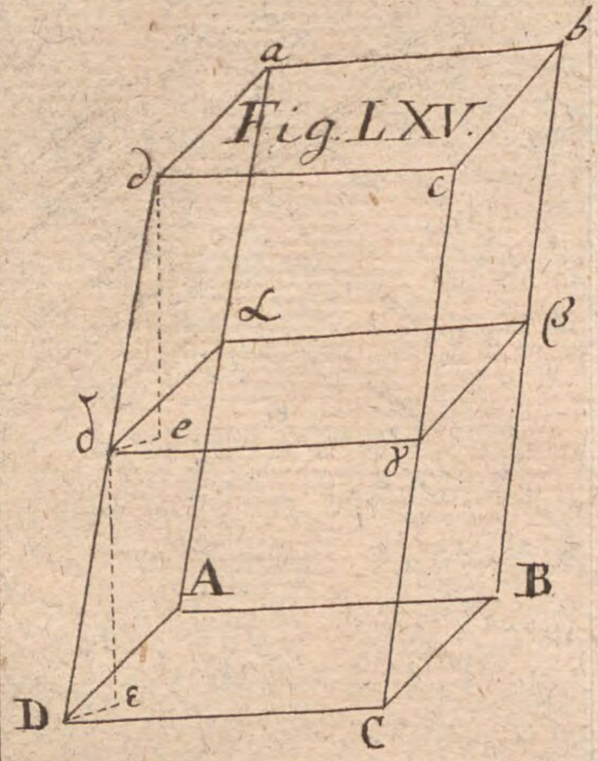


Fig. LXV.

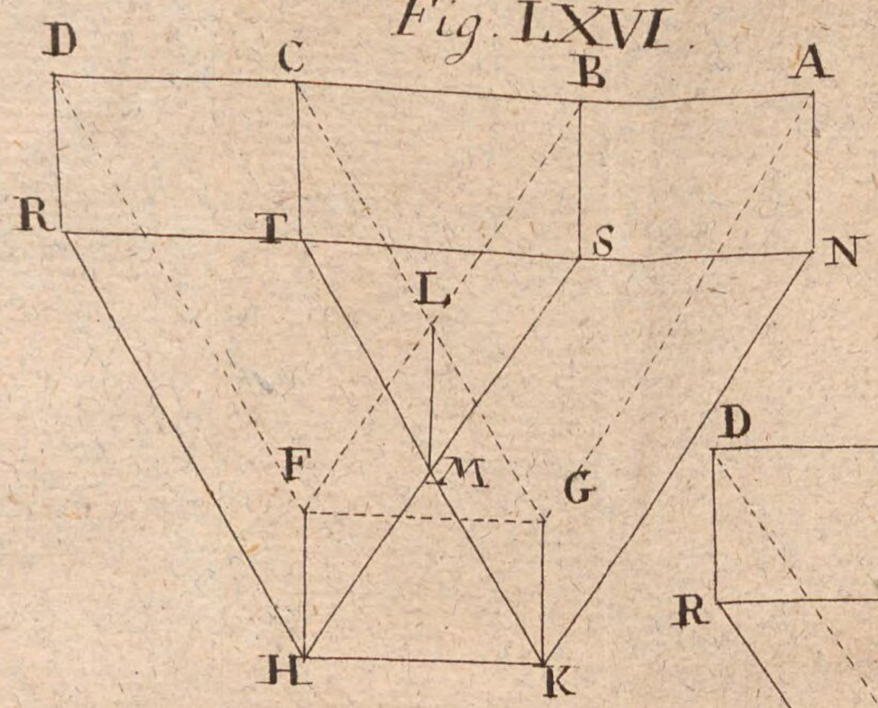


Fig. LXVI.

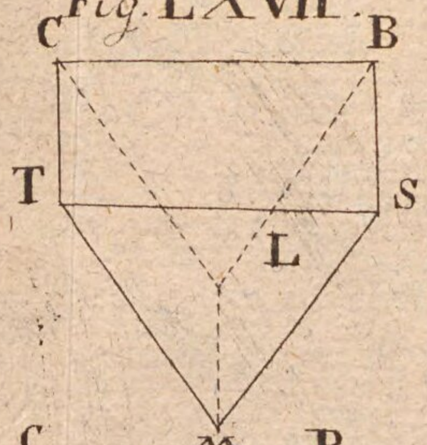


Fig. LXVII.

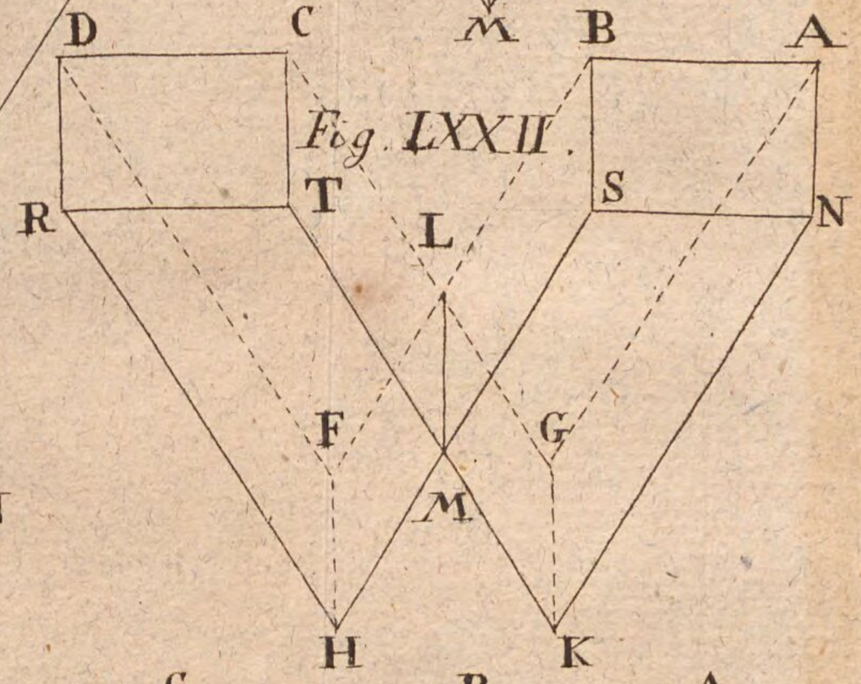


Fig. LXXII.

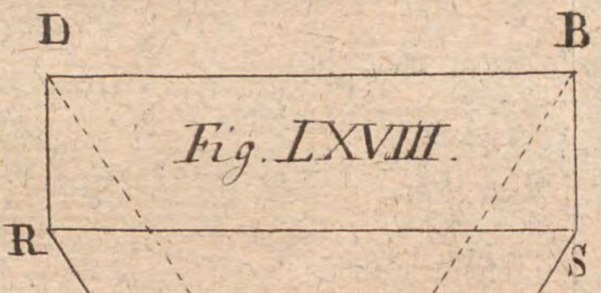


Fig. LXVIII.

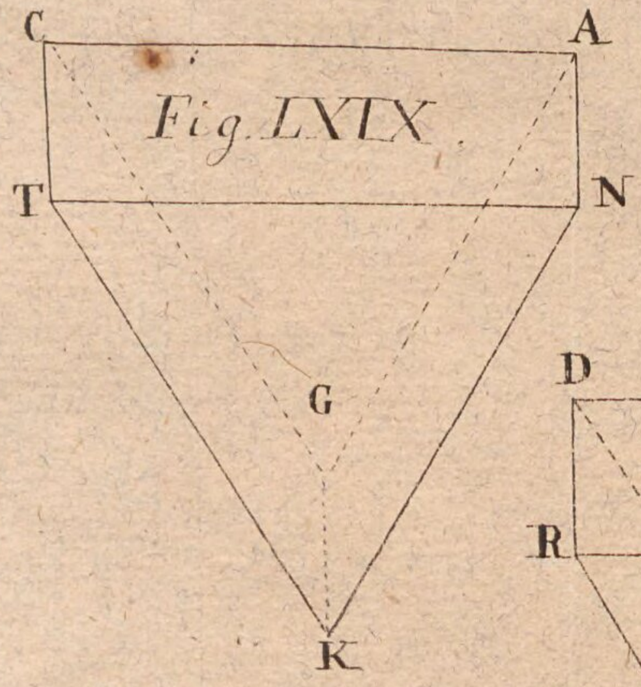


Fig. LXIX.

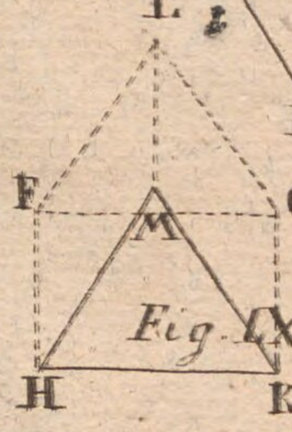


Fig. LXX.

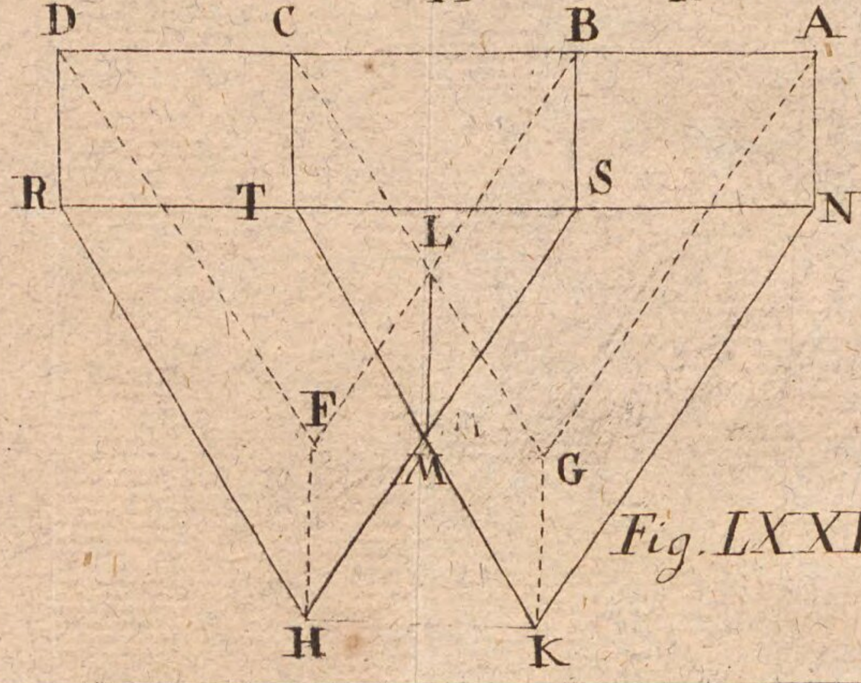


Fig. LXXI.

II. Th. Tab. VIII.

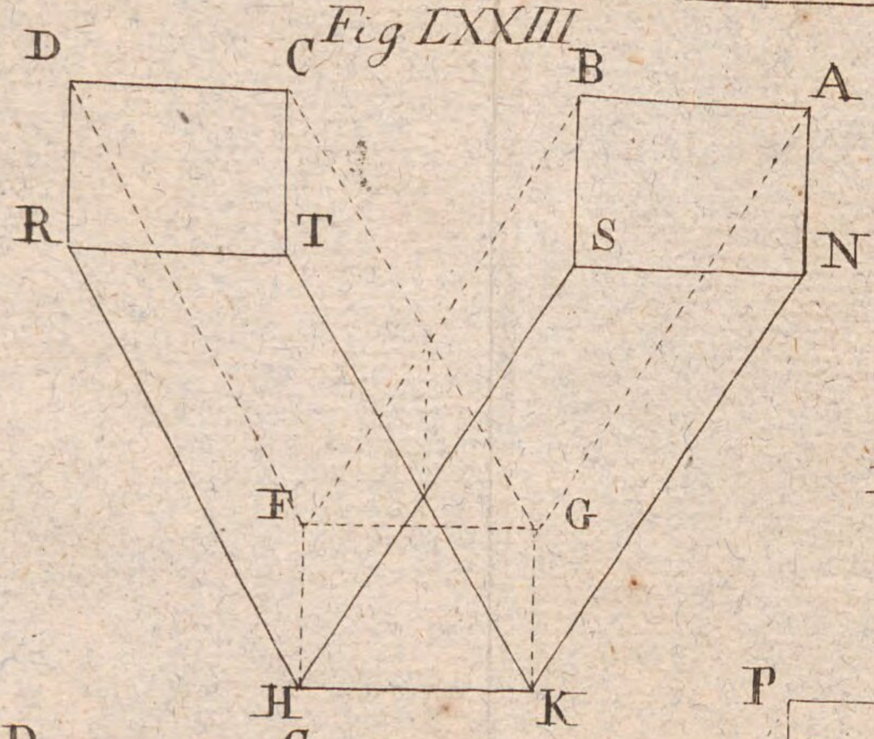


Fig LXXIII.

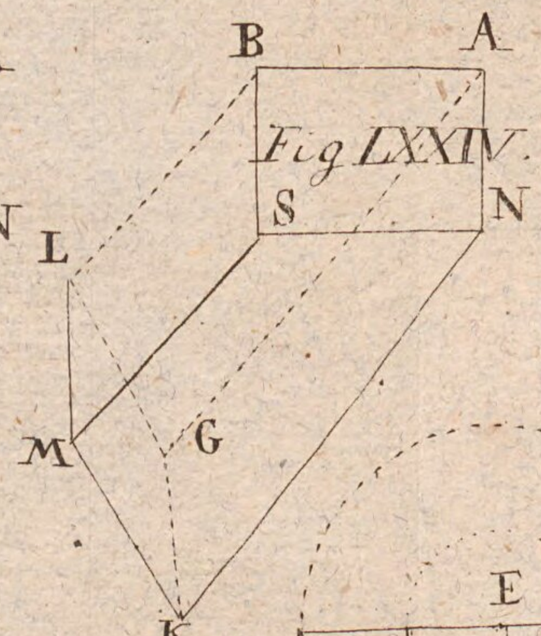


Fig LXXIV.

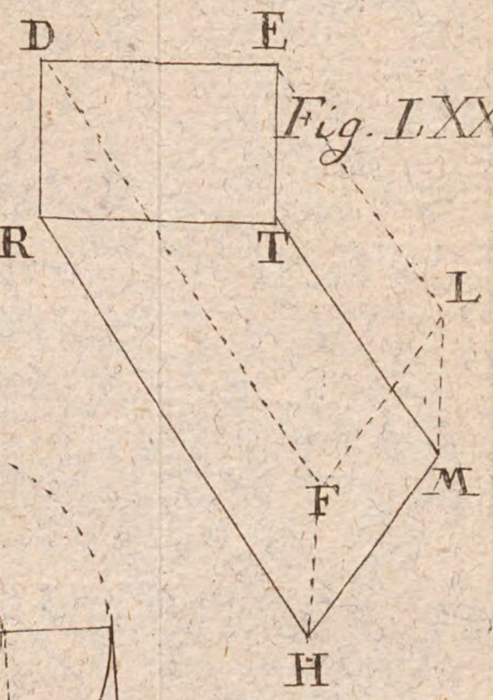


Fig. LXXIV.

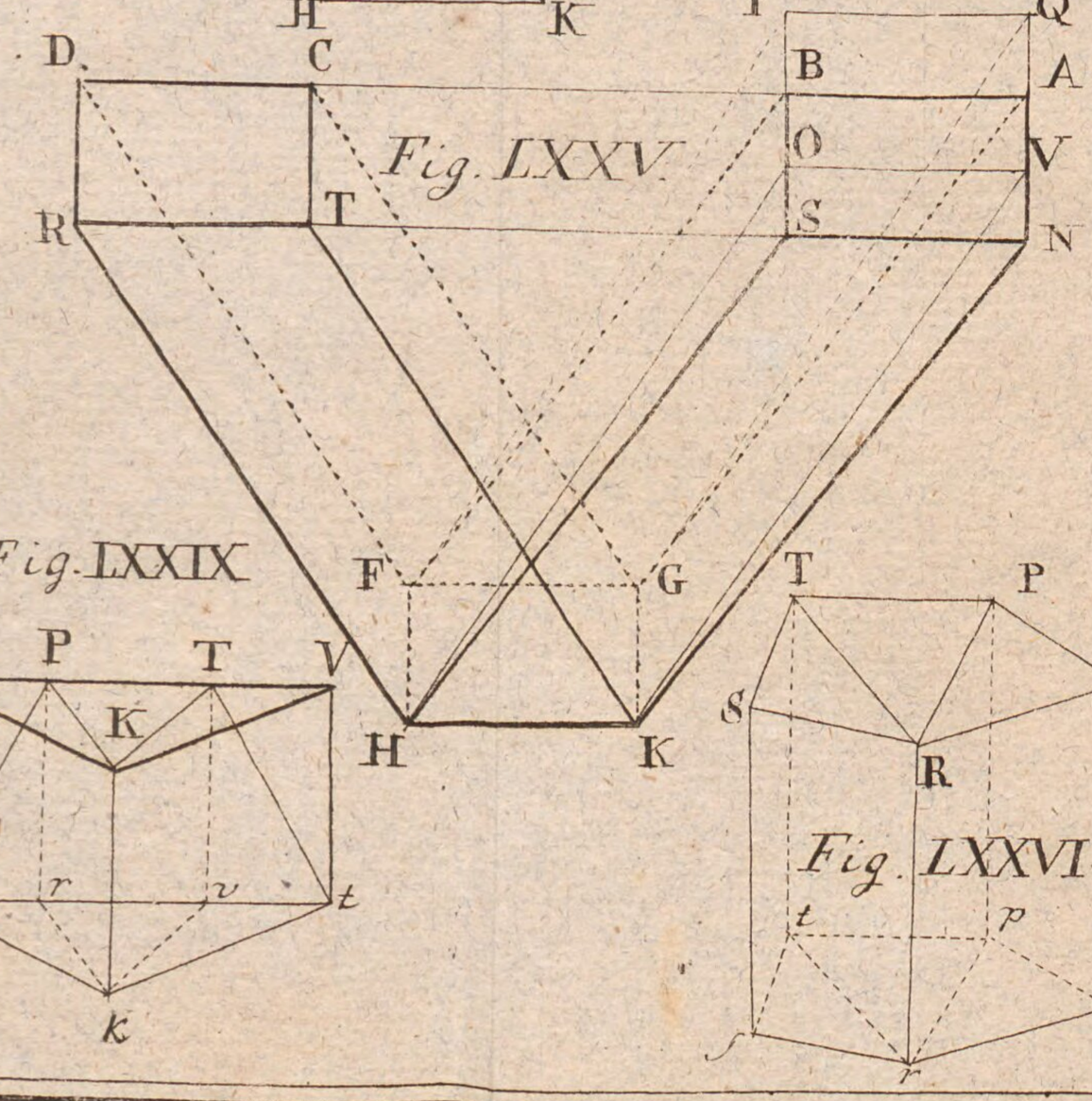


Fig. LXXV.

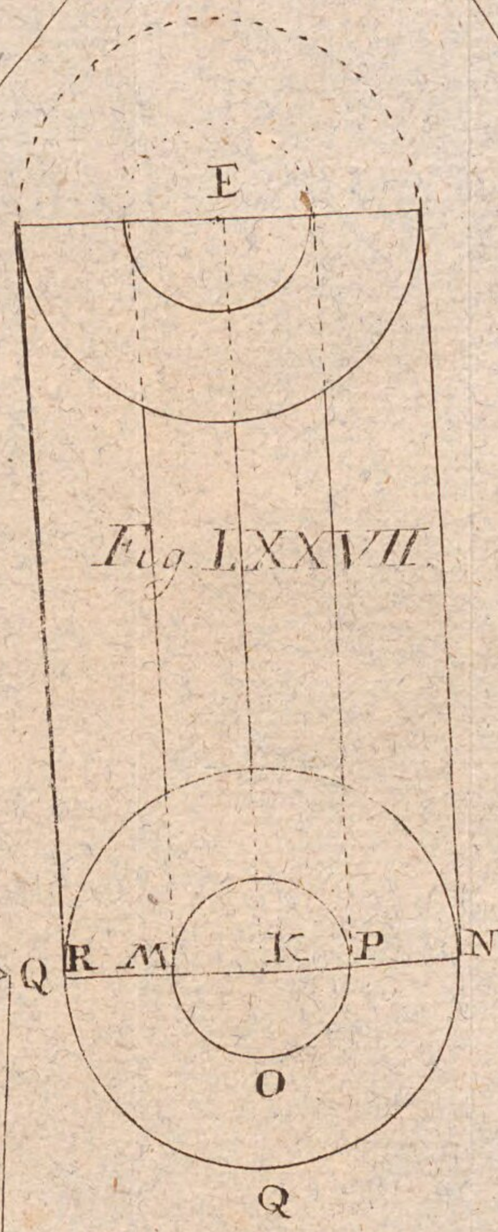


Fig. LXXVII.

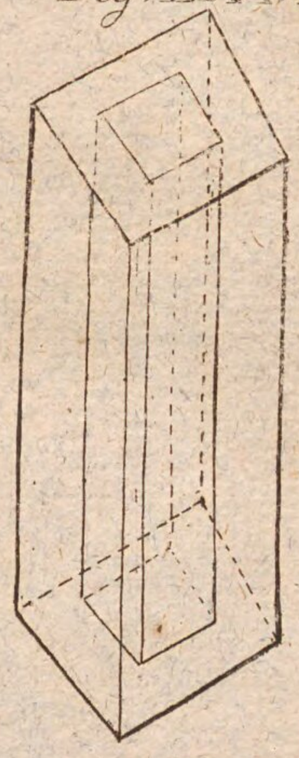


Fig. LXXVIII.

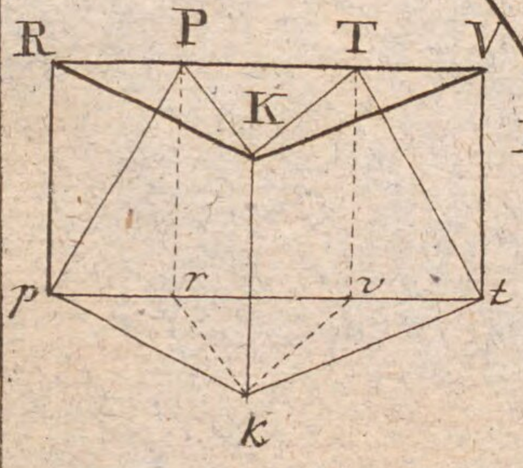


Fig. LXXIX.

Fig. LXXVI.

II. Th. I ab. IX

Fig. LXXX

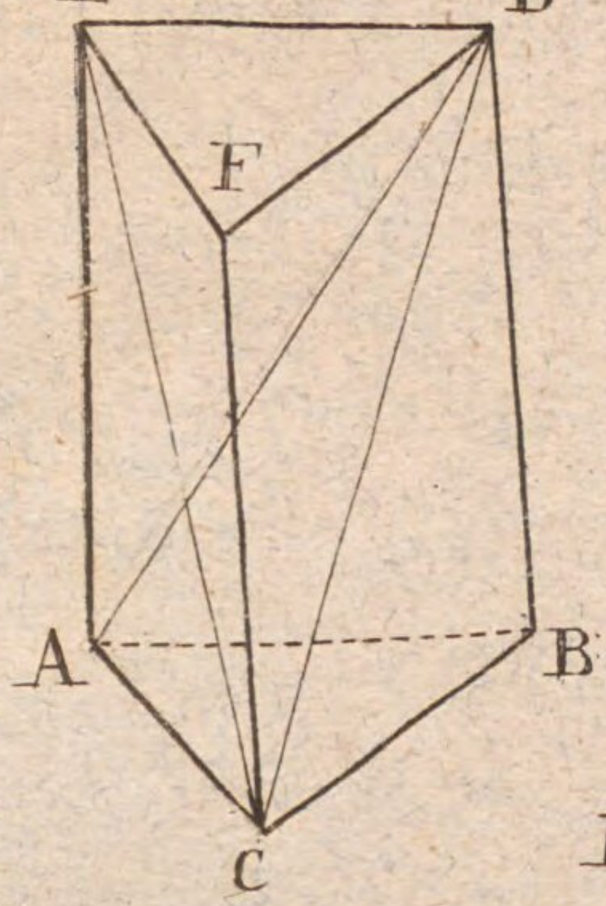


Fig. LXXXI.

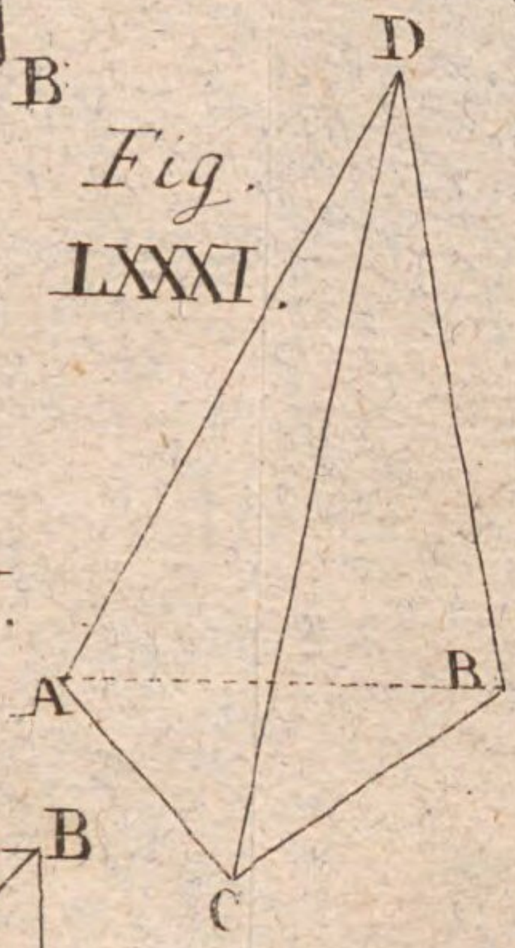


Fig. LXXXII

Fig. LXXXIII

Fig. LXXXIV.

Fig. LXXXV

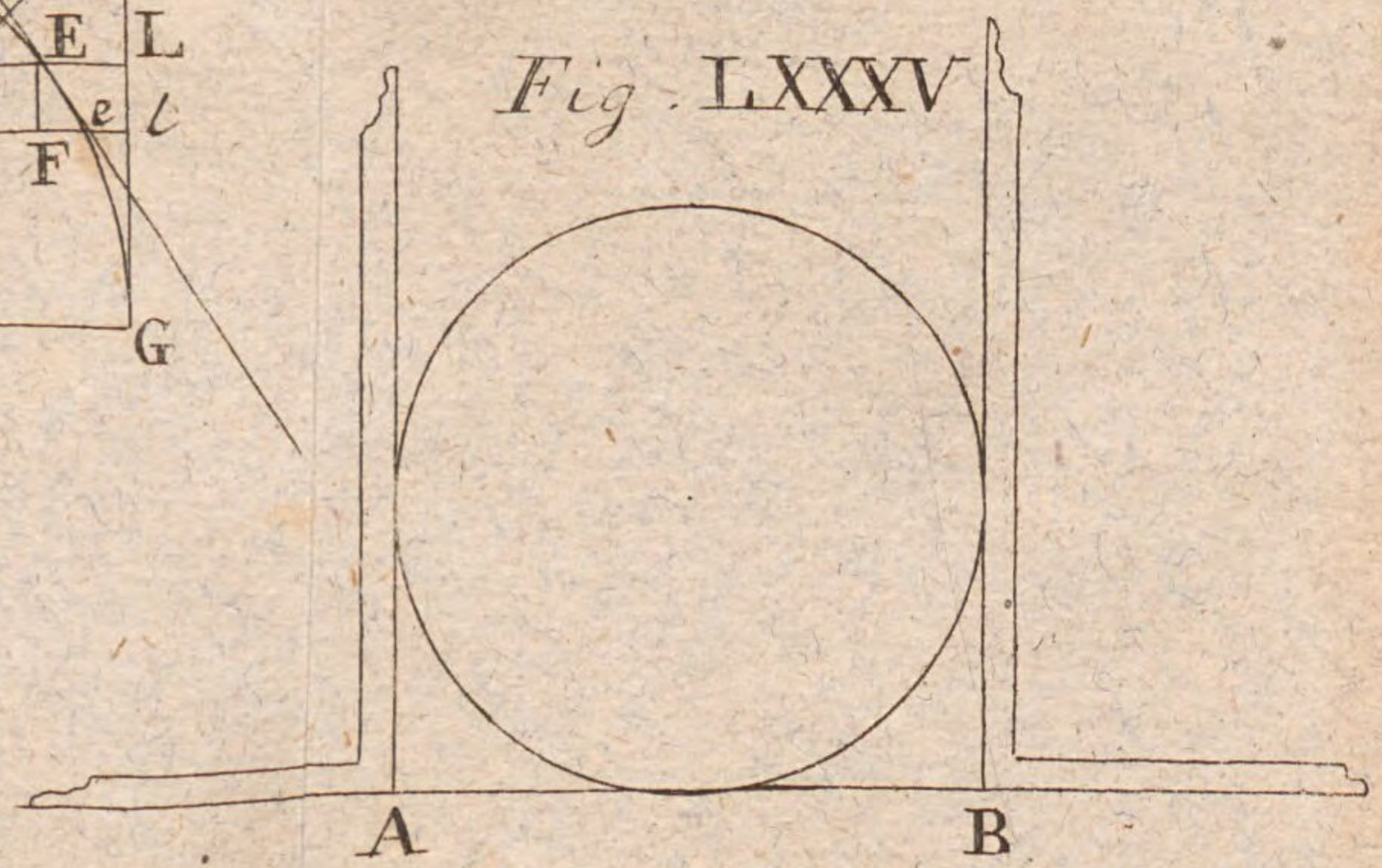
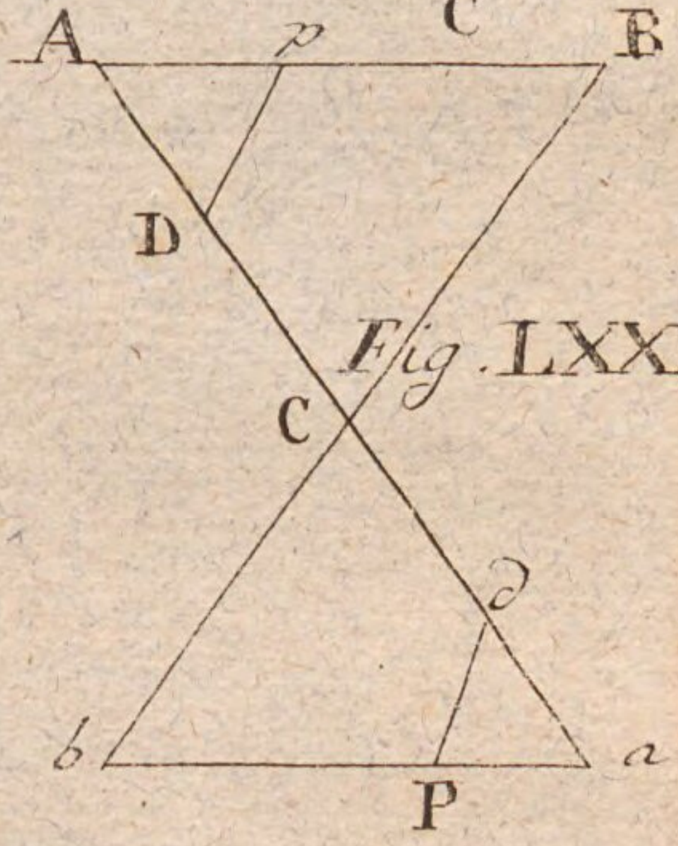


Fig. LXXXVI



II. Th Tab. X.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Lempe, Johann Friedrich,

Erläuterungen der Kästnerischen Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie

Bd.: 2

Altenburg (1781)

Math.u. 78-2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10625434-0
VD18 15554449-001